

気泡の非線形振動による圧力波の放射

北大工 白崎 実・井上 良紀

§1. はじめに

液体中に気泡が存在しているとき、まわりの液体の圧力が変化すると気泡は運動(振動)を開始する。この気泡の力学的挙動を扱う分野を気泡力学といい、キャビテーション現象を理解する上で本質的な重要性をもつ。気泡の半径は非常に小さいが、その運動は一般に激しいために、生ずる現象は単純なものではなく、未知の解明すべき点が多く残されている。

液体中の気泡の問題を初めて解析的にとり扱ったのは Rayleigh¹ である。Rayleigh は、無限に広がる球対称場とみなせる非粘性非圧縮性の静止液体中に突然一個の球形の真空部分が生じたとき、それは極めて短時間のうちに周囲の液体で埋められることによって崩壊して、このときに液体中に高い圧力を発生することを示した。また、空洞が等温変化をする気体で満たされている場合の気泡半径 $R^*(t^*)$ の振動方程式も求めた。その後の気泡力学の研究は、この Rayleigh の理論に、種々の実在効果すなわち、液体の粘性²、圧縮性³ や液体-気体界面で働く表面張力⁴、蒸発・凝縮の熱的な非平衡過程の影響など⁵を考慮するという形で発展してきた。これらの研究ではさまざまな実在効果を取り入れた気泡振動の支配方程式が導出されていて、気泡の非線形振動に対する影響が調べられている。しかし、気泡の非線形振動によって液体中に放射される波に主眼をおいた詳細な研究は少なく、液体中を伝播する波に関しては、まだ明らかにされていないことが多い。

本研究では、単一球形気泡を含む液体がある瞬間に一樣に加圧されるという基本的な場合を考える。気泡は球対称を保って振動するとし、気泡の中心は移動しないものとする。さらに、気泡内は一樣な理想気体で満たされていて、それは断熱変化をするものとする。そして、液体のもつ圧縮性、気体-液体界面での表面張力の効果は考えるが、衝撃波面を除いては粘性と熱伝導性の効果は考えない。

このとき、主として気泡の非線形振動によって液体中に放射される圧力波に着目する。この圧力波は、液体中を伝播するとともに蓄積する非線形効果によって徐々にその波形を歪ませ、やがて遠方場で衝撃波を形成する。衝撃波形成距離の見積りは、Benjamin⁶によってはじめてなされた。しかし Benjamin は表面張力の効果を考慮しておらず、また見積りの際に必要となる気泡振動の解には液体の圧縮性が考慮されていない。そこで、液体の圧縮性、初期に与える加圧比の大きさ、および気体-液体界面に働く表面張力の効果が、衝撃波の形成距離へ与える影響を特異摂動法(接続漸近展開法)を用いて調べる。

また、液体の圧縮性および表面張力の効果を考えない場合には、気泡の振動によって液体中に誘起される圧力場の時間発展は、圧力の最大値が液体中のどの位置に存在するかによって3段階から構成されることが理論的に示されている。⁷ このことを、液体の圧縮性および表面張力の効果を考慮した場合について調べ、やはり液体の圧力場の時間発展は3段階から構成されることを示す。

さらに、気泡の振動の初期に液体中に放射される膨張波の伝播について調べる。これは、流れ場についての基礎方程式系を近似することなしに、差分法(Osher の差分スキーム)で解いて解析を行う。

§2. 問題の定式化—基礎方程式と境界条件および初期条件

無限に広がる静止液体中に、半径 R_0^* 、内部の圧力が $p_i^*(0)$ である単一球形気泡が存在するとする。時刻 $t^* = 0$ の瞬間に気泡を含む液体の場全体が一樣に p_∞^* ($p_\infty^* > p_i^*(0)$) に加圧されたとする。このとき $t^* \geq 0$ で、生じる気泡の非線形振動とそれにより誘起される液体の流れ場について考える(図 1)。

ただし、気泡は常に球形を保って運動し、流れ場も球対称であるとする。液体の圧縮性、液体-気体の界面に働く表面張力の効果は考慮するが、気泡面を通しての物質および熱の交換の効果は小さいとして無視する。気泡内気体は凝縮しない理想気体で、気泡内で常に均一であるとし、一樣に断熱圧縮あるいは断熱膨張すると仮定する。衝撃波面を除いて粘性と熱伝導性の効果は考えない。

このとき液体の流れ場の連続の式と Euler の運動方程式は球座標系で、次のようになる。

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \rho^* u^*) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \quad (2.2)$$

ここで、 r^* は気泡の中心から測った距離、 t^* は時間、 u^* は流速、 ρ^* は密度、 p^* は圧力を表し、すべて有次元の量である。液体を水とすると、次の状態方程式を用いることができる。

$$p^* = (p_\infty^* + B^*) \left(\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} \right)^n - B^* \quad (2.3)$$

$n = 7.15$, $B^* = 3049.13 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ であり、 ρ_∞^* は、 $p^* = p_\infty^*$ における水の密度である。

液体の場は球対称であるので流れ場は渦なしとなり、速度ポテンシャル ϕ^* を導入することができる。速度ポテンシャルと流速との関係は

$$u^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \quad (2.4)$$

である。(2.1)–(2.4) を用いると液体の場の速度ポテンシャルの支配方程式は、

$$\Delta^* \phi^* - \frac{1}{c_\infty^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^{*2}} = \frac{1}{c_\infty^{*2}} \left[\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right) \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right)^2 + (n-1) \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right)^2 \right\} \Delta^* \phi^* \right] \quad (2.5)$$

となる。ここで c_∞^* は加圧後の静止液体中での音速を表し、記号 Δ^* は Laplacian であり次式で与えられる。

$$\Delta^* = \frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}$$

気泡内気体は断熱変化をすると仮定しているので、気泡内圧力 $p_i^*(t^*)$ は、時刻 t^* における気泡の半径 $R^*(t^*)$ を用いて、

$$p_i^*(t^*) = p_i^*(0) \left[\frac{R^*(t^*)}{R_0^*} \right]^{-3\gamma} \quad (2.6)$$

と表せる。ここに γ は気体の比熱比である。

初期に気泡面上にあった流体粒子はずっと気泡面上にあり続ける。また、気泡壁面上では気泡の内部の圧力と液体の圧力とが表面張力を介して釣り合っているので、気泡面上での運動学的、および力学的な境界条件は、

$$r^* = R^*(t^*) \text{ において } u^* = \dot{R}^*(t^*) \quad (\equiv dR^*(t^*)/dt^*), \quad p^* = p_i^*(t^*) - \frac{2\sigma^*}{R^*(t^*)} \quad (2.7)$$

となる (σ^* : 表面張力定数)。ここで “ $\cdot$ ” (ドット) は、時間 t に関する微分を表す。また無限遠では、液体は圧力 p_∞^* で静止一様状態にある。つまり、

$$r^* \rightarrow \infty \text{ において } u^* = 0, \quad p^* = p_\infty^* \quad (2.8)$$

初期条件は以下のように表せる。

$$r^* \geq R_0^* \text{ において } u^* = 0, \quad p^* = p_\infty^* \quad (2.9)$$

$$0 \leq r^* < R_0^* \text{ において } p^* = p_i^*(0) \quad (2.10)$$

§3. 特異摂動法による解の導出

本研究では、気泡のまわりの空間を以下の3つの領域に分割して考える。

- | | |
|-------------------|-------|
| (1) 内部領域 (非圧縮性領域) | } 近傍場 |
| (2) 外部領域 (波動領域) | |
| (3) 遠方場 | |

そして、それぞれの領域で解を求め、各領域の解どうしを接続させる特異摂動法 (接合漸近展開法) を用いて、気泡の非線形振動の支配方程式を求め、気泡の非線形振動によって液体中に引き起こされる流れ場の解析を行う。⁸ このためには、波動領域で音響マッハ数が十分に小さいという、いわゆる弱非線形の仮定が必要である。

気泡近傍には液体の圧縮性を無視できるような非常に薄い領域 (気泡の半径と同程度) があり、これが内部領域 (非圧縮性領域) である。その外側に、外部領域 (波動領域) と呼ばれる線形の波動方程式に支配される領域が存在する。この領域では圧縮性の効果はあらわれるが、非線形の効果は無視できる。外部領域は、気泡から放射される波の波長程度の広がりをもつ。内部領域 (非圧縮性領域) と外部領域 (波動領域) は、あわせて近傍場と呼ばれる。そしてそのさらに外側は遠方場と呼ばれる。そこでは、波が伝播するにつれて、蓄積する弱非線形効果によって波形は徐々に歪みやがて衝撃波が形成される。⁹

3-1. 内部領域

この領域では、気泡の初期半径程度の空間スケールで現象を見る。次のような無次元化を行う。

$$r = \frac{r^*}{R_0^*}, \quad t = \frac{t^*}{R_0^*/v}, \quad u = \frac{u^*}{v}, \quad \phi = \frac{\phi^*}{R_0^*v}, \quad R = \frac{R^*}{R_0^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty^*}, \quad p_i = \frac{p_i^*}{p_\infty^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} \quad (3.1)$$

ここで、 $v = \sqrt{p_\infty^*/\rho_\infty^*}$ は、Rayleigh の与えた気泡面の平均速度である。(2.5) より、無次元化した速度ポテンシャルの支配方程式は

$$\Delta\phi = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + (n-1) \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right\} \Delta\phi \right], \quad \left(\Delta \equiv \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \quad (3.2)$$

のようになる。ここに ε は、

$$\varepsilon = \frac{v}{c_\infty^*} \ll 1 \quad (3.3)$$

であるので内部領域で最も支配的な方程式は Laplace 方程式になる。

$$\Delta\phi = 0 \quad (3.4)$$

よく知られているように、渦なしの非圧縮性流体の運動は Laplace 方程式によって記述される。つまり、気泡の近傍の内部領域においては、液体はほぼ非圧縮性流体としてふるまう。このとき流速は、

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.5)$$

で与えられる。無次元化によって、境界条件 (2.7), (2.8) と初期条件 (2.9), (2.10) は次のようになる。

境界条件:

$$r = R(t) \text{ において } u = \dot{R}(t), \quad p = mR(t)^{-3\gamma} - \frac{2T}{R(t)} \quad (3.6)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ において } u = 0, \quad p = 1 \quad (3.7)$$

初期条件:

$$r \geq 1 \text{ において } u = 0, \quad p = 1 \quad (3.8)$$

$$0 \leq r < 1 \text{ において } p = m \quad (3.9)$$

ここで, m, T は

$$m = \frac{p_i^*(0)}{p_\infty^*} \quad (3.10)$$

$$T = \frac{\sigma^*}{p_\infty^* R_0^*} \quad (3.11)$$

であって, m は初期の気泡内圧力と加圧後の液体の圧力との比を, T は表面張力の大きさを表す無次元パラメータである. 速度ポテンシャルの支配方程式 (3.2) を境界条件と初期条件 (3.6)–(3.9) のもとで解けば, 内部領域での解が求まる.

(3.3) で定義した小さいパラメータ ε を用いて, 速度ポテンシャルを次のように展開する.

$$\phi = \phi_{i(0)} + \varepsilon \phi_{i(1)} + \varepsilon^2 \phi_{i(2)} + \cdots \quad (3.12)$$

これを (3.2) および (3.6) 第 1 式に代入して 1 と ε^1 のオーダーに関する支配方程式と境界条件は,

$$O(1): \Delta \phi_{i(0)} = 0; \quad (r = R(t) \text{ において }) \quad \frac{\partial \phi_{i(0)}}{\partial r} = \dot{R}(t) \quad (3.13)$$

$$O(\varepsilon): \Delta \phi_{i(1)} = 0; \quad (r = R(t) \text{ において }) \quad \frac{\partial \phi_{i(1)}}{\partial r} = 0 \quad (3.14)$$

となる. (3.13) より, 1 のオーダーで

$$\phi_{i(0)} = -\frac{f_0(t)}{r}, \quad f_0(t) = R(t)^2 \dot{R}(t) \quad (3.15)$$

となる. (3.14) より ε^1 のオーダーでは,

$$\phi_{i(1)} = g_1(t) \quad (3.16)$$

となる. したがって, (3.2) の ε^1 のオーダーまでの解は,

$$\phi = -\frac{R(t)^2 \dot{R}(t)}{r} + \varepsilon g_1(t) \quad (3.17)$$

となる. $g_1(t)$ は外部領域とのマッチングによって決まる.

3-2. 外部領域

この領域では, 空間座標を次のように無次元化しなおす.

$$\tilde{r} = \frac{r^*}{\varepsilon/R_0^*} = \varepsilon r \quad (3.18)$$

これは, およそ気泡から放射される波長程度の空間スケールで現象を見ることを表している. すると速度ポテンシャルの支配方程式は,

$$\tilde{\Delta} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \varepsilon^4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + (n-1) \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \varepsilon^4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \right\} \tilde{\Delta} \phi, \quad \left(\tilde{\Delta} \equiv \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} \right) \quad (3.19)$$

となる. $\varepsilon \ll 1$ であるから, この領域では線形波動方程式

$$\tilde{\Delta}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

が最も支配的な方程式になる. この領域では流速は,

$$u = \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} \quad (3.21)$$

と表される. 外部領域では, 速度ポテンシャルを次のように展開する.

$$\phi = \varepsilon \phi_{o(0)} + \varepsilon^2 \phi_{o(1)} + \varepsilon^3 \phi_{o(2)} + \cdots \quad (3.22)$$

これを内部領域のときと同様に, (3.19) に代入すると ε^1 に関する支配方程式は,

$$\tilde{\Delta}\phi_{o(0)} = \frac{\partial^2 \phi_{o(0)}}{\partial t^2} \quad (3.23)$$

となる. 放射条件 (無限遠からやってくる波はないという条件) を仮定するとこの解は

$$\phi_{o(0)} = -\frac{F_0(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} \quad (3.24)$$

となる. F_0 の関数形は, 内部領域とのマッチングによってきまる.

3-3. 内部領域と外部領域とのマッチング

内部領域での解と外部領域での解とは 2 つの領域の境界で接続されなければならないので $\phi_{i(0)}$, $\phi_{i(1)}$, $\phi_{o(0)}$ に関して次式が成立する.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\phi_{i(0)} + \varepsilon \phi_{i(1)}] = \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} [\varepsilon \phi_{o(0)}] \quad (3.25)$$

上式の右辺を t のまわりで Taylor 展開し,

$$\tilde{r} = \varepsilon r \quad (3.26)$$

であることに注意して ε の同じ次数どうしを比較すれば,

$$F_0(t) = f_0(t), \quad f_1(t) = -F'_0(t) \quad (3.27)$$

となる. したがって, ε^1 のオーダーまでの内部領域の解は,

$$\phi = -\frac{f_0(t)}{r} + \varepsilon f'_0(t), \quad f'_0(t) = 2R(t)\dot{R}(t)^2 + R(t)^2\ddot{R}(t) \quad (3.28)$$

となり, 外部領域の解は, 次のようになる.

$$\phi = -\varepsilon \frac{f_0(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} \quad (3.29)$$

3-4. 遠方場

非線形音響学でよく知られた球座標系での遠方場で適用される方程式 (単一波の式) は,

$$\frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial \psi} = 0 \quad (3.30)$$

で与えられる.^{9,10} ここで,

$$w \equiv \varepsilon \tilde{r} u, \quad z \equiv \frac{n+1}{2} \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_m}, \quad \psi \equiv t - \tilde{r} \quad (3.31)$$

である. ただし $\tilde{r}_m$ は, 近傍場とマッチングする位置を表す. (3.30) の厳密解は '陰な解' の形で,

$$w = w(\psi + zw) \quad (3.32)$$

と表される. この解は, 近傍場の外部領域の最も支配的な解と十分大きな $\tilde{r}$ で接続されるので, (3.21) と (3.29) より,

$$u \sim \varepsilon^2 \frac{f'_0(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} \quad (3.33)$$

と見積れる. ここで " ' " (プライム) は引き数に関する微分を表す. したがって (3.31) 第 1 式, (3.33) より遠方場では, 波形の歪みを考慮した空間座標 η および位相 $\hat{\psi}$ を用いて,

$$w = \varepsilon^3 f'_0(\hat{\psi}), \quad \hat{\psi} = t - \eta \quad (3.34)$$

と表せる. このとき

$$\hat{\psi} = \psi + zw \quad (3.35)$$

$$\tilde{r} = \eta + zw = \eta + \varepsilon^3 \frac{n+1}{2} f'_0(\hat{\psi}) \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_m} \quad (3.36)$$

という関係が成り立つ. 近傍場とのマッチングの位置を表す $\tilde{r}_m$ は, 今考えている近似の範囲では決定できない. Benjamin⁶ の解析の結果を考慮すれば, 位相 $\hat{\psi}$ における気泡面上で接続するのが妥当であると考えられる. よって,

$$\tilde{r}_m = \varepsilon R(\hat{\psi}) \quad (3.37)$$

として, 結局, 遠方場の解は, 次のようになる.

$$u = \varepsilon^2 \frac{f_0(\hat{\psi})}{\tilde{r}}, \quad \hat{\psi} = t - \tilde{r} + \varepsilon^3 \frac{n+1}{2} f'_0(\hat{\psi}) \ln \frac{\tilde{r}}{\varepsilon R(\hat{\psi})} \quad (3.38)$$

§4. 気泡の非線形振動による圧力波

4-1. 気泡の非線形振動の支配方程式

液体の圧力は, 無限遠での境界条件を用いると,

$$p = 1 - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} u^2 \quad (4.1)$$

とかける. (3.28) より, 内部領域の ε^1 のオーダーまでの解は,

$$\phi = -\frac{R^2 \dot{R}}{r} + \varepsilon (R^2 \ddot{R} + 2R \dot{R}^2) \quad (4.2)$$

で与えられるので, (4.1) に (4.2) を代入し, (3.6) 第 2 式 ($r = R(t)$ での力学的な境界条件) に液体の圧力を代入して整理すると,

$$R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 - m R^{-3\gamma} + 1 + \frac{2T}{R} - \varepsilon (R^2 \ddot{R} + 6R \dot{R} \ddot{R} + 2\dot{R}^3) = 0 \quad (4.3)$$

を得る。(4.3)は、圧縮性の効果を取り入れた気泡の非線形振動の支配方程式であり、これはすでに多くの研究者によって導出されている(たとえば Refs. 3 および 5 参照)。(4.3)の解、 $R(t)$ (および $\dot{R}(t)$, $\ddot{R}(t)$) が求まれば、全領域の流れ場を R の関数として表すことができる。(4.3)は非線形常微分方程式であり、一般には解析的にその解を求めることができないので、Runge-Kutta 法を用いて数値的に解を求める。また、(4.3)の左辺の $O(1)$ の部分のみの式、

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - mR^{-3\gamma} + 1 + \frac{2T}{R} = 0 \quad (4.4)$$

は Rayleigh-Plesset の式であり、非圧縮性液体中の気泡の振動を記述する方程式である。

参考までに、図 1 から図 4 に気泡半径の時間変化を、図 5、図 6 に気泡面の最大速度の局所マッハ数の m および T 依存性を示す。すでに知られていることであるが、液体の圧縮性を考慮したことで気泡から波が放射されることになり、その結果、気泡振動の振幅は減衰する。 m を小さくすると、気泡の周期は短く、到達する最小半径は小さくなり、局所マッハ数は大きくなる。 T を大きくすることでも同様の傾向があることがわかる。

4-2. 衝撃波形成距離の見積り

§3. で求めた遠方場の解を用いて、衝撃波形成距離を表す式を導出する。(3.36)の ε^3 の項は、非線形効果のために波形が歪んでくる効果を表している。次の条件が満たされる点で、衝撃波は形成される。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{r}}\right)_t = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_t \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{r}}\right)_t = -\infty \quad (4.5)$$

これから、衝撃波が形成される条件は、

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \eta}\right)_t = 0 \quad (4.6)$$

であることがわかる。上式に (3.36) を代入すると、最も支配的な衝撃波形成の条件は、

$$1 - \varepsilon^3 \frac{n+1}{2} f_0''(\hat{\psi}) \ln \frac{\tilde{r}}{\varepsilon R(\hat{\psi})} = 0 \quad (4.7)$$

となる。 f_0'' は、

$$f_0'' = R^2 R''' + 6RR'R'' + 2R'^3 \quad (4.8)$$

である。したがって衝撃波形成距離 $\tilde{r}_s$ は、

$$\tilde{r}_s = \varepsilon R(\hat{\psi}_s) \exp \left[\frac{2}{\varepsilon^3 (n+1) f_0''(\hat{\psi}_s)} \right] \quad (4.9)$$

となる。最も近い衝撃波形成距離は、(4.9)の f_0'' を最初に極大にする位相 $\hat{\psi}_s$ で与えられる。気泡振動の支配方程式 (4.3) を数値的に解いて、その解 $R = R(t)$ (およびそれらの微分 $\dot{R}$, $\ddot{R}$) が求まれば、(4.8), (4.9) を用いて $\tilde{r}_s$ を決定できる。ここで以下のことに注意しておく。Benjamin は、表面張力の効果を考慮していない ($T = 0$)。また、 f_0'' に含まれる気泡振動の解として、Benjamin は、(4.4) の Rayleigh-Plesset の式 (非圧縮液体の対する気泡振動の支配方程式) の解を用いている。この意味において、Benjamin は衝撃波形成距離の見積りに、圧縮性の効果を完全には取り入れていないといえる。

4-3. 圧縮性、加圧比、表面張力の効果の衝撃波形成距離への影響

(4.9) で得た衝撃波形成距離の m , T 依存性について調べる。衝撃波形成距離のグラフを図 7、図 8 に示す。これらの、横軸は m および T であり、縦軸は衝撃波形成距離 r_s である。 r_s は気泡の初期半径 R_0^* 、つまり内部領域の空間スケールで規格化されている。 $r_s = 1$ は気泡の初期半径に対応する。図 7 は、衝撃波形成距離の m 依存性を示すグラフである。これから、 m を小さくすると、衝撃波形成距離が小さくなることがわかる。また、Benjamin の結果と比較すると、圧縮性を考慮した気泡振動の解を用いたことで、非圧縮の解を用いたときよりも衝撃波形成距離は大きくな

ることがわかる。つまり、Benjamin は衝撃波形成距離を小さく見積りすぎていたことがわかる。 m があまりに大きいと、衝撃波形成距離は非常に大きくなってしまい、現実的に衝撃波は形成されないことになる。逆に m があまりに小さいと衝撃波形成距離は小さくなるが、本研究で仮定している弱非線形の仮定が崩れて、弱非線形理論の適用範囲を超えてしまう。

図 8 は衝撃波形成距離の T 依存性を表す。 T を大きくすることで衝撃波形成距離は小さくなる。 T の変化でも衝撃波形成距離はそのオーダーを変えるので、小さな気泡 (表面張力の効果が大きい) の崩壊によって生ずる衝撃波を考える場合には、表面張力の効果を見捨てることはできないといえる。

4-4. 圧力場の時間発展の 3 段階

気泡の収縮過程において液体中に形成される圧力場について考える。液体を非圧縮性流体であると仮定し、表面張力の効果を考えないときに、圧力場の時間発展は、圧力の最大値が

- (1) 第 1 段階: 無限遠にある
- (2) 第 2 段階: 液体中の有限の位置にある
- (3) 第 3 段階: 気泡面上にある

という 3 段階から構成されることが理論的に解析されている。⁷ また、Rayleigh¹ の解析によれば、真空のキャビティが崩壊する場合には圧力場の時間発展は、上の (1), (2) の 2 段階から構成されることが示されている。

液体の圧縮性や表面張力などの効果を考慮した場合についても、気泡の収縮過程の圧力場については、たとえば藤川・赤松⁵ や、富田・島¹¹ によってすでに計算されている。しかし、上のような圧力場の時間発展についての議論はなく、むしろ Rayleigh の取り扱った問題のように (1), (2) の 2 段階から構成されることを示すグラフが描かれている。

ここでは、液体の圧縮性を考慮したときに圧力場の時間発展がどのようになるかについて 4-1 で得られた解を用いて ε^1 までの精度で調べる。(4.1) と (3.29) を用いると圧力は、 ε^1 までで次のようにかける。

$$p = 1 + \frac{f_0(t - \varepsilon r)}{r} - \frac{1}{2} \frac{f_0^2(t - \varepsilon r)}{r^4} - \varepsilon \frac{f_0(t - \varepsilon r)f_0'(t - \varepsilon r)}{r^3} + O(\varepsilon^2) \quad (4.10)$$

$$f_0(t - \varepsilon r) = R^2(t - \varepsilon r)R'(t - \varepsilon r) \quad (4.11)$$

(4.10) は、波動領域における圧力を表すが、非圧縮領域に対しても適用できる。第 1 段階と第 2 段階が存在することは、(4.10) を数値的に計算することでわかる。ここでは、第 3 段階についてくわしく調べよう。もし、第 2 段階までしかないのであれば、気泡面上での圧力勾配は最小半径に至るまで正のままである。第 3 段階では、気泡面上での圧力勾配が負であることが必要である。(4.10) より、気泡面上での圧力勾配は、

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\ddot{R}(t) + O(\varepsilon^2) \quad (4.12)$$

あるいは、Euler の運動方程式から

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\rho \left. \frac{Du}{Dt} \right|_{r=R} \quad (4.13)$$

ともかける。(4.12), (4.13) から、気泡面の加速度と気泡面上の圧力勾配は逆の符号をもつことがわかる。気泡の運動では、内向きの最大流速を実現する時刻を境にして、 $\ddot{R}$ の符号は、負から正へと変わる。つまり気泡面上での圧力勾配が、正から負へと変わる時刻が必ず存在する。このことと、(4.10) を用いた数値解析を併用することで、液体の圧縮性および表面張力の効果を考慮した場合についても、確かに圧力の時間発展は 3 段階から構成されることがわかる (図 9 参照)。

§5. 気泡の非線形振動によって放射される膨張波

本章では気泡を含む流れ場の基礎方程式系を近似することなしに Osher の差分スキームで直接解いて気泡の振動の初期の短い時間の流れ場について調べる。気泡の振動開始直後の短い時間に着目した研究はこれまでになく、詳しく調べられていない。そこで、このような時間領域、およびそれに対応する空間領域での現象を調べる。

得られた圧力場の解を図 10 に示す。横軸は気泡の中心から測った距離であり、 $r = 1$ が初期の気泡半径である。ここで考える短い時間では気泡半径はほとんど変化せず初期半径程度のままである。縦軸は、液体の圧力を表し、 $p = 1$ が $t > 0$ での無限遠での圧力となる。図 10 にはこのときの時刻 $t = 0.001$ から $t = 0.01$ まで 0.001 ごとの圧力分布を示してある。各時刻における波の先端 (wave front) より先 (遠方) は加圧後の静止一様状態となっている。 $t = 0$ の瞬間に場が加圧されて、気泡面上での圧力は不連続になり、この情報が波として伝播していく。しかし波の先端の部分をよくみると、これは“不連続”のまま伝播しているのではなく、徐々にではあるが“なだらか”になりながら伝播していているのがわかる。これは、この“つつ立った部分”の先端と、そのわずか後方の (先端よりも) 圧力の低い部分とでは、伝播速度が異なり、圧力の高い部分は低い部分よりも速く伝わるからである。よって、 $t = 0$ の瞬間に不連続であった圧力分布は、時間の経過とともに“なだらか”になりながら伝播していくことになる。図 10 の“つつ立った部分”は、膨張波であって、気泡の振動の初期のごく短い時間に気泡から膨張波が放射されていることを示している。

これに対して (4.10) を用いて圧力場を求めた結果 (図 11) では、なだらかになることなく、不連続のまま伝播していることがわかる。これは (4.10) の精度の範囲では、流れ場は線形の波動方程式に支配されているために、圧力差による伝播速度の差が生じないためである。しかし膨張波を記述していない点を除けば、(4.10) はよい近似を与えていることがわかる。基礎方程式系を直接数値計算で解いた結果に膨張波があらわれるのは、気泡振動がこれほど穏やかな初期の時刻でも流れ場の非線形性が効いてきているためである。

図 10 の膨張波 (つつ立った部分) の付け根の部分をつなぐことができる曲線は、液体を非圧縮性流体としたときの圧力分布とほぼ等しい。非圧縮性流体中の音速は ∞ であるから、 $t = 0$ の瞬間にできた圧力の不連続は、 $t > 0$ には無限遠まで伝わっていて、無限遠において $p = 1$ となる。このことから、気泡の振動開始直後の、気泡近傍の領域では、膨張波の部分を除いては非圧縮性の解に極めて近く、この領域は非圧縮性の領域であることがわかる。つまり、§3. で述べた、空間を 3 つの領域に分けて気泡に最も近い領域 (内部領域) が最低次の近似で非圧縮性領域であるとした解析が妥当であったことを示している。

§6. 結論

本研究で明らかになった結果をまとめる。気泡のまわりの空間を 3 つの領域に分割し、それぞれの領域で解を求め、各領域の解どうしを接続させる特異摂動法 (接合漸近展開法) を用いて、気泡の非線形振動の支配方程式を求め、気泡の非線形振動によって液体中に引き起こされた流れ場 (主として圧力波) について解析を行った。気泡の非線形振動とそれによって引き起こされる流れ場は、2 つの無次元パラメータすなわち、初期の気泡内圧力と加圧後の液体の圧力との比 m と、気泡の界面に働く表面張力の大きさを表す T によって決まる。そして以下のことが明らかとなった。

- (1) m を小さくすると、衝撃波形成距離は小さくなり、 T を大きくしても同様の傾向がみられる。衝撃波形成距離は、 T の変化にも敏感に反応する。したがって、衝撃波形成距離を見積る場合には、表面張力の効果を考慮することは重要であるといえる。また Benjamin は、衝撃波形成距離を見積るときに必要となる気泡振動の解に液体の圧縮性を考慮していない。その結果、衝撃波形成距離を小さく見積りすぎていることがわかった。
- (2) 液体の圧縮性および表面張力の効果を考えない場合と同様に、液体の圧縮性と表面張力の効果を考慮した場合にも、液体の圧力場の時間発展が 3 段階から構成されることがわかった。
- (3) 液体の流れ場の基礎方程式系を近似することなく数値的に解いて、気泡の振動の初期の流れ場のについて調べた。その結果 $t = 0$ に気泡を含む液体が加圧されて、気泡面上に生じた圧力の不連続のために、初期のごく短い時間に、気泡から膨張波が放出されることが明らかとなった。また、気泡振動の初期に波が伝播している比較的気泡に近い領域では、膨張波の存在を除けば、ほぼ非圧縮性の領域とみなせて、気泡に最も近い領域が最低次の近似で非圧縮性領域であるとした §3. の解析が妥当であったことを示している。

参考文献

- ¹ Rayleigh, Lord 1917 On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Philos. Mag.* **34**, 94-98.
- ² Poritsky, H. 1952 Proc. 1st U.S. National Congress in Applied Mechanics (A.S.M.E.), 813-821.
- ³ Keller, J. B. & Kolodner, I. I. 1956 Damping of underwater explosion bubble oscillations. *J. Appl. Phys.* **27**, 1152-1161.
- ⁴ Plesset, M. S. 1949 The dynamics of cavitation bubbles. *J. Appl. Mech.* **16**, 277-282.
- ⁵ Fujikawa, S. & Akamatsu, T. 1980 Effects of the non-equilibrium condensation of vapour on the pressure wave produced by the collapse of a bubble in a liquid. *J. Fluid Mech.* **97**, 481-512.
- ⁶ Benjamin, T. B. 1958 Pressure wave form collapsing cavities. *Proceedings of the 2nd Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington* 207-233.
- ⁷ Inoue, Y. & Kobayashi, T. 1993 Nonlinear oscillation of a gas-filled spherical cavity in an incompressible fluid. *Fluid Dyn. Res.* **11**, 85-97.
- ⁸ Inoue, Y. & Gotoh, Y. 1991 Formation of weak shock waves caused by a sphere pulsating at large amplitude and low frequency. *J. Sound Vib.* **146**, 269-280.
- ⁹ 井上良紀, 木谷 勝 編: 乱れと波の非線形現象 (朝倉書店, 1993)
- ¹⁰ Blackstock, D. T. 1964 On plane, spherical, and cylindrical sound waves of finite amplitude in lossless fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, **36** 217-219
- ¹¹ Tomita, Y. & Shima, A. 1967 On the behaviour of a spherical bubble and the impulse pressure in a viscous compressible liquid. *Bull. JSME* **20**, 1453-1460.

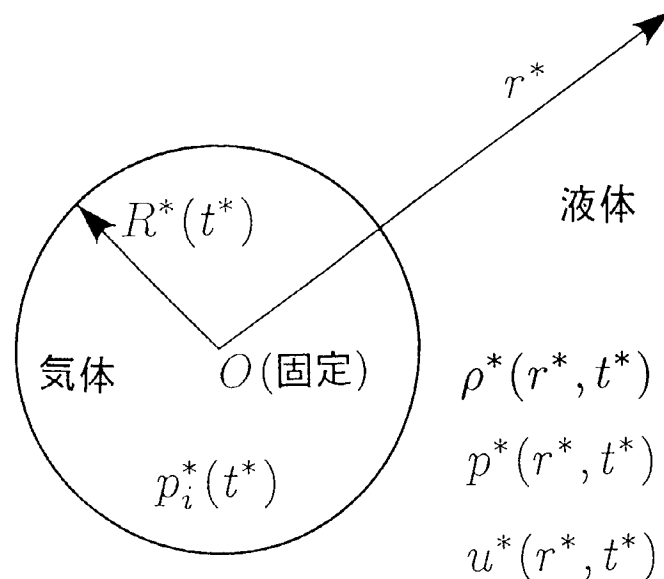


図 1. 概念図

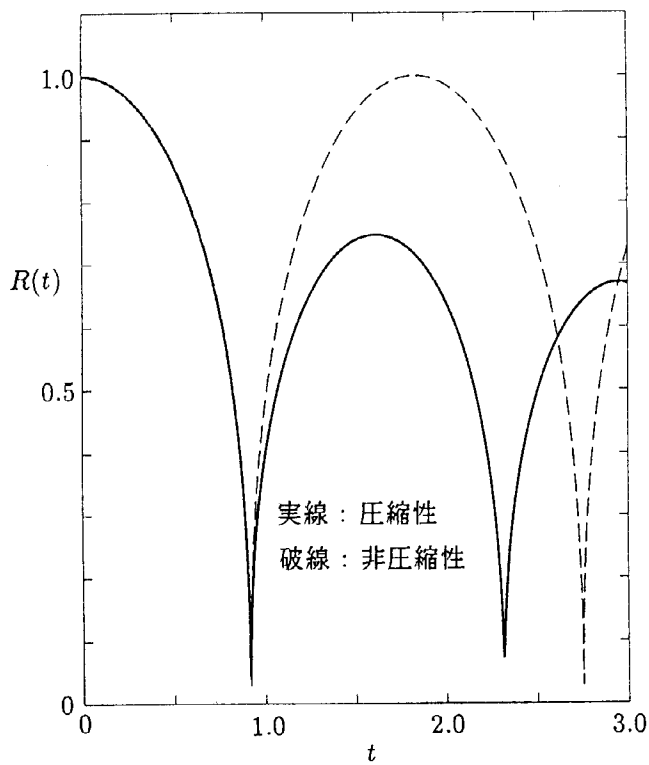


図 2. 気泡の非線形振動 (圧縮性の影響)

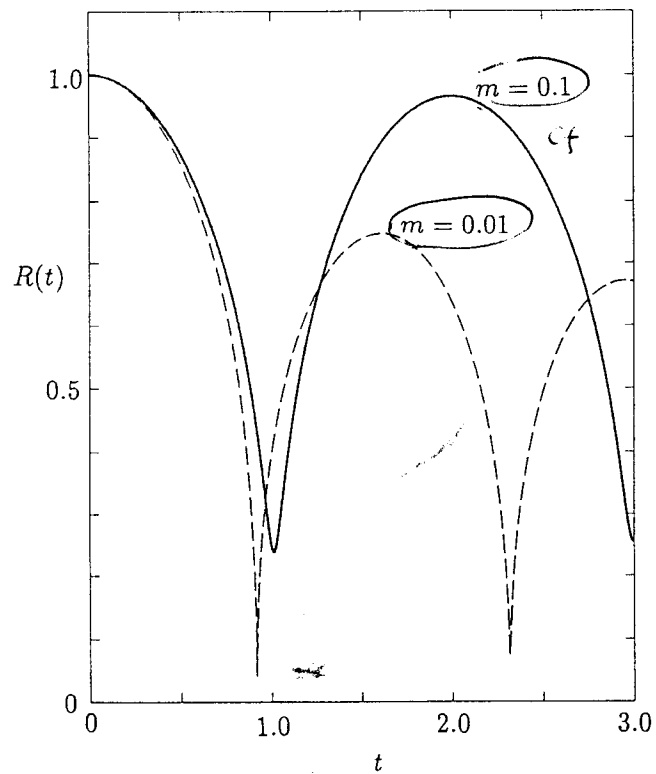


図 3. 気泡の非線形振動 (加圧比の影響)

$m = 0.01$
 $T = 0.0072$

$T = 0.0072$

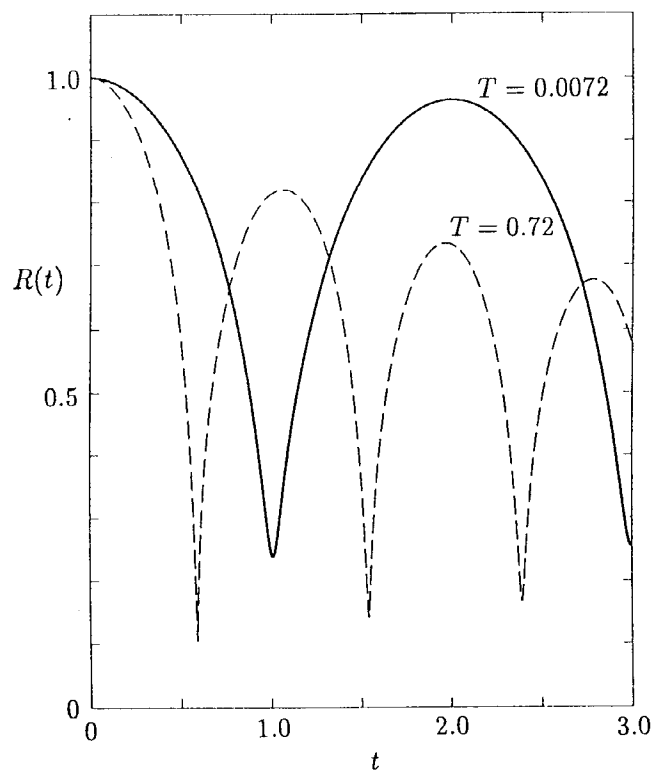


図 4. 気泡の非線形振動 (表面張力の影響)

$m = 0.1$

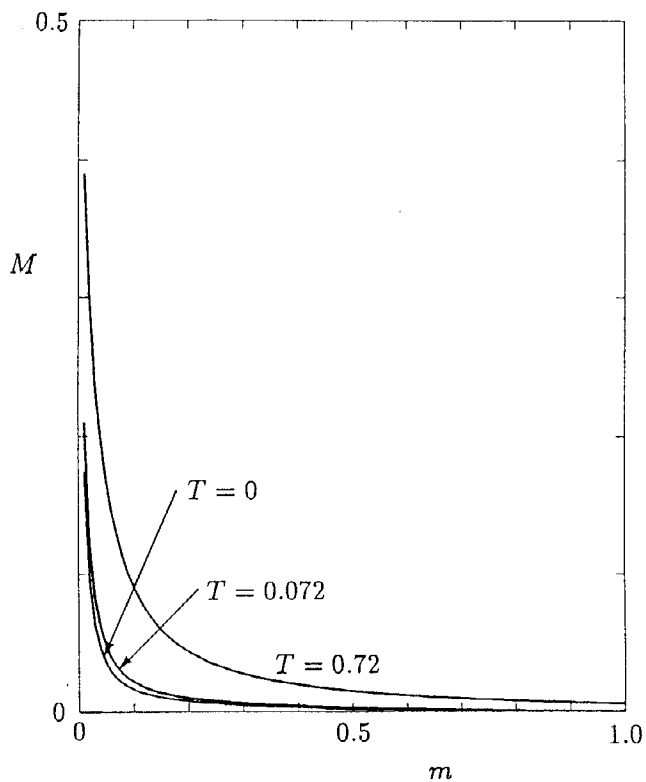


図 5. 気泡面の最大速度の局所マッハ数の m 依存性

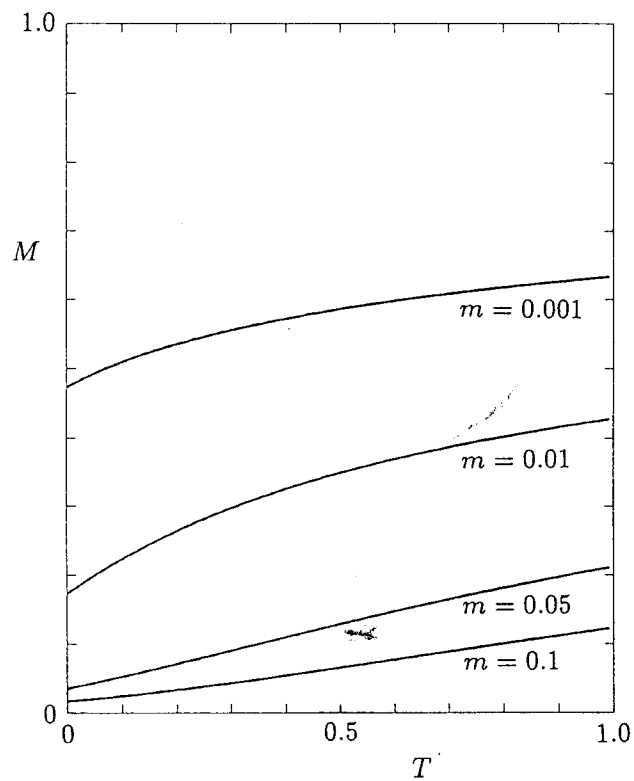


図 6. 気泡面の最大速度の局所マッハ数の T 依存性

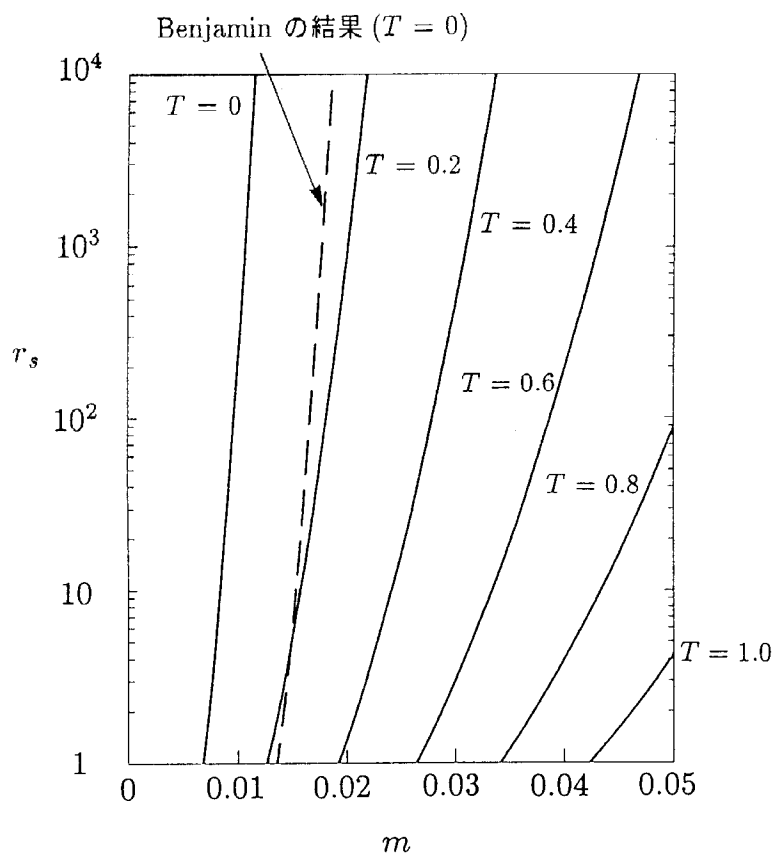


図 7. 衝撃波形成距離の m 依存性

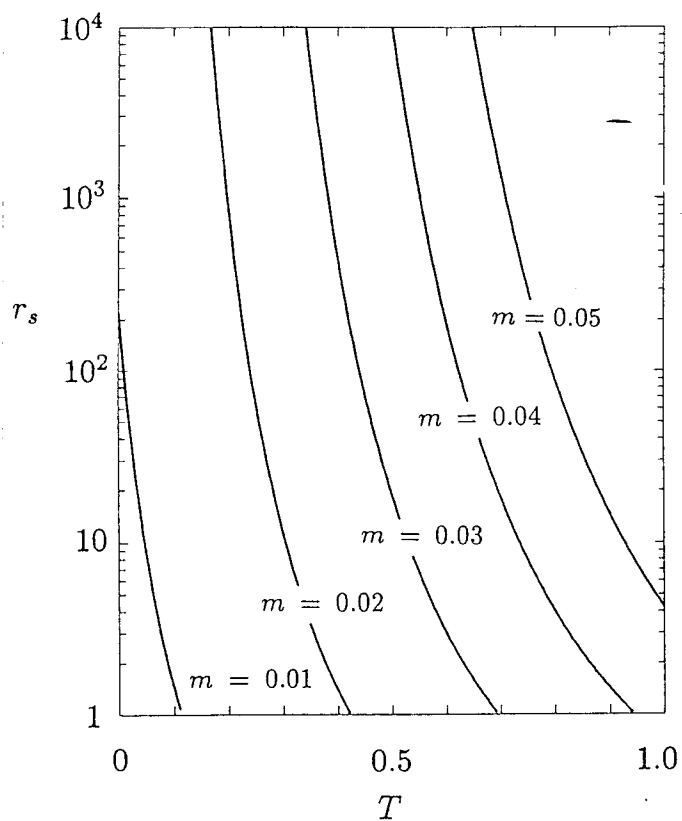


図 8. 衝撃波形成距離の T 依存性

$m = 0.01$
 $T = 0.0072$

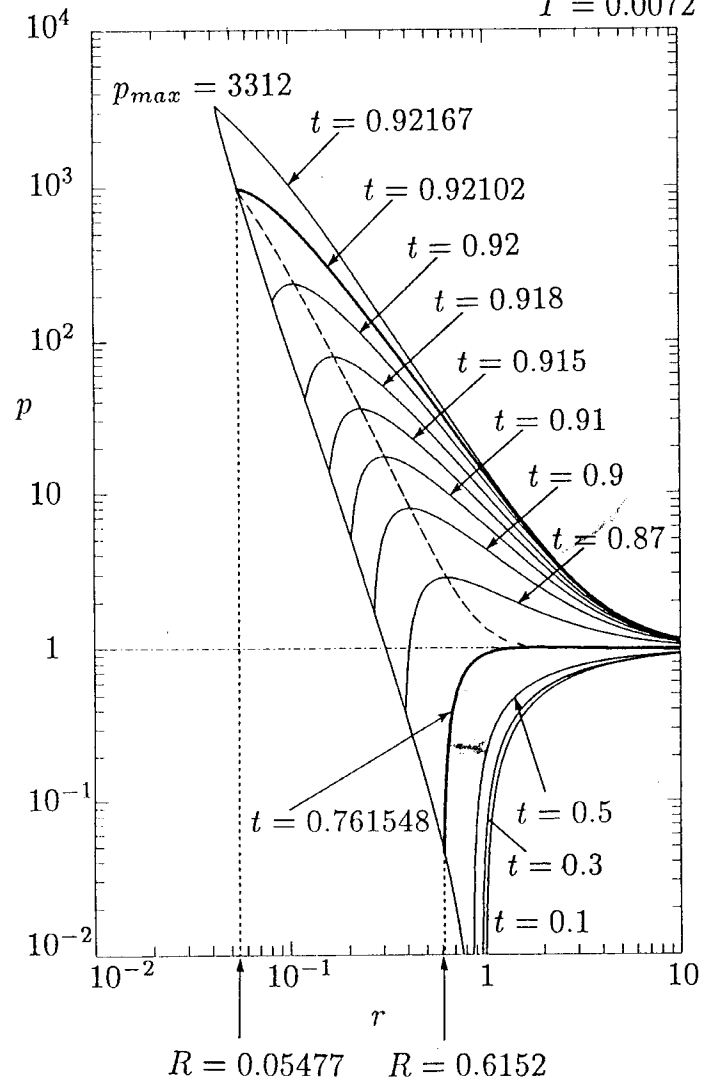


図 9. 圧力場の時間発展 (収縮過程)

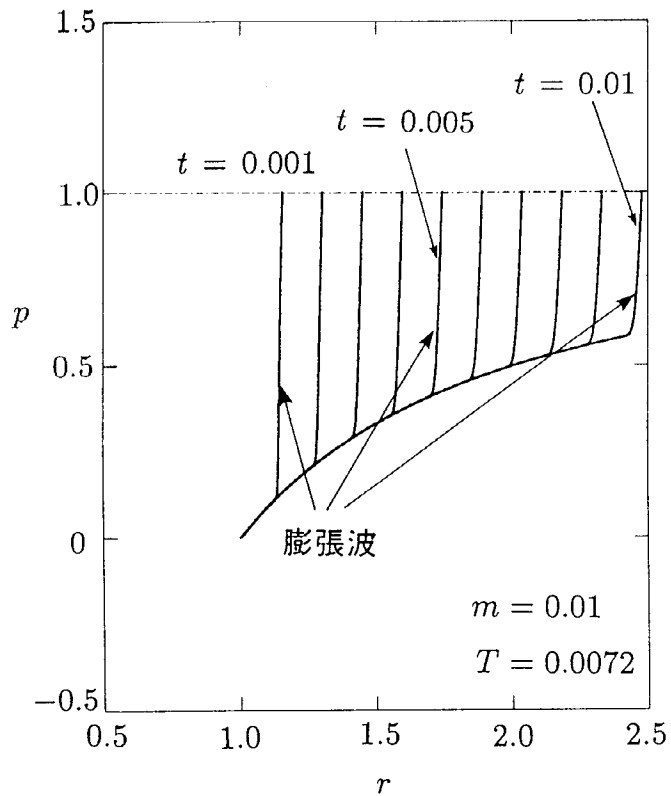


図 10. 圧力場の時間変化 (直接数値計算)

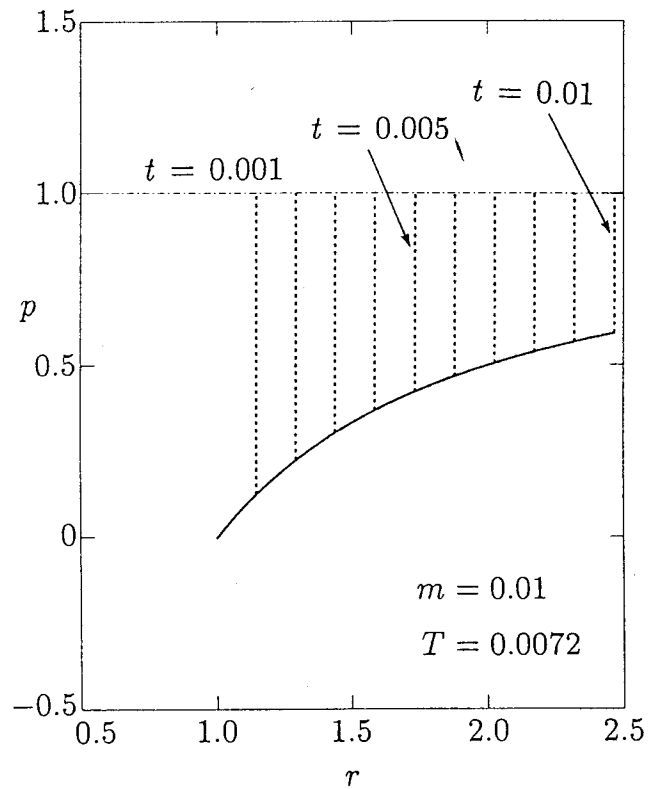


図 11. 圧力場の時間変化 (理論解析)