

非一様な気体における線形および非線形波動伝播

北大・工 井上 良紀・久保 典子

非一様な媒質中を伝播する波動の研究は古い歴史をもつ。たとえば, Rayleigh (1887) は前世紀に成層圏内での波動の伝播をすでに解析している。このような研究のなかで, とりわけ JWKB 法 (1924, 1926) とよばれる数学的技法を駆使して短波長の平面波の伝播の問題を近似的に解くアプローチは重要なものであった。この JWKB 近似による取扱いを含むいわゆる幾何音響学 (geometrical acoustics)¹ の分野では, 現在, 非一様な媒質中の波動伝播に関して極めて詳細な解析的研究が発展させられている。また, 研究対象を特定した層状媒質 (layered media) 中の波動伝播が大変詳しく研究されている。² 層状構造をもつものとしては, 超音波フィルター, レンズ, 表面波遅延回路などの人工的なものから, 海洋と大気の成層流体のような自然のものまでいろいろとある。地殻を伝わる地震波もこの範ちゅうに入る。しかし, 非一様性のあらわれかたも種々さまざまであるし, 一様媒質中の波動伝播とくらべると数学的に格段と取扱いが困難になるので, なお多くの研究されるべき課題が残っている。

以下で, 非一様な媒質中の線形平面波の伝播問題を, 幾何音響学的近似を行うことなく, 厳密に解く。ついで, 弱非線形平面波の伝播を記述する一般化された Burgers 方程式を導き, これに基づき音波の非線形発展を解析する。いずれの場合も, 対応する一様媒質中の波動伝播と比較すると, 非一様媒質中の波動が著しく異なる挙動を示すことがわかるであろう。

§1. 問題の定式化—基礎方程式と境界条件

散逸性流体の一次元問題に対する連続の式, Navier-Stokes 方程式, エネルギー方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

ここに, ρ は密度, u は流速, p は圧力, T は温度, s はエントロピーを表わす。ただし, 外力は働いていないものとし, 第一粘性係数 η , 第二粘性係数 ζ , および熱伝導率 κ は定数とした。

完全気体に対する熱力学的な関係式

$$p = \rho R T, \quad (\text{Boyle-Charles の法則}) \quad (4)$$

$$p = \text{const.} \times \rho^\gamma \exp \left(\frac{s}{c_v} \right) \quad (5)$$

ここに, R は気体定数, $\gamma = c_p/c_v$ (c_p : 定圧比熱, c_v : 定積比熱) は両比熱の比を表わす。

初期条件

非散逸性流体に対しては, 基礎方程式系 (1)–(5) は,

$$(u, \rho, p, T, s) = (0, \rho(x), p_0, T(x), s(x)) \quad (6)$$

を厳密解としてもつ (散逸性流体に対しては, §3 参照)。ただし, $T(x) = p_0/R\rho(x)$, $s(x) = -c_p \log \rho(x) + \text{const.}$ である。つまり, はじめに密度分布 $\rho(x)$ が与えられておれば, 温度分布 $T(x)$ とエントロピー分布 $s(x)$ は確定する。気体は初期にこのような状態にあるとして, 速度擾乱を $x=0$ において, $t=0$ から与える (次の境界条件)。

境界条件

$$u = u_0 \sin \omega t, \quad x = 0 \text{ において } (t \geq 0). \quad (7)$$

ただし、振幅 u_0 と角振動数 ω は定数とする。

以後の利用のために、エネルギー方程式 (3) を (1) と (5) を用いて次のように変形しておく都合がよい。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = (\gamma - 1) \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{p}{\rho} \right). \quad (8)$$

§2. 線形問題

非一様媒質中の微小振幅の音波の伝播を調べるためには、まず §1 であげた基礎方程式を線形化し、波動方程式を導出しなければならない。得られた波動方程式を、与えられた境界条件 (7) のもとに解くことができるならば、波のふるまいを完全に知ることができる。ただし、ここでは散逸性は無視する。

まず、独立変数と従属変数を以下に記すように無次元化する：

$$\begin{aligned} t^* &= \omega t, & x^* &= k_0 x, & u^* &= u/c_0, & \rho &= \rho_0 \bar{\rho}(x^*) (1 + \rho^*), \\ p &= p_0 (1 + p^*), & c &= c_0 \bar{c}(x^*) (1 + c^*), & s &= c_v (\bar{s}(x^*) + s^*). \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、下添字の 0 は、 $(x, t) = (0, 0)$ における物理量であることを示す。 c は音速、 k は波数を表わすので、 $c_0 = \omega/k_0$ が成り立つ。また、 $\bar{\rho}(x^*)$ は ρ_0 で無次元化された初期の密度分布を表わし、 $\bar{c}(x^*)$ は c_0 で無次元化された初期の局所的な音速を表わす。よく知られているように、完全気体に対しては、 $c^2 = \gamma p/\rho$ の関係があるので、明らかに、

$$\bar{c}^2(x^*) = \frac{1}{\bar{\rho}(x^*)} \quad (10)$$

でなければならない。最後に、一様媒質中の波動伝播とは異なり、非一様媒質中の波動伝播においては、エントロピー変化が伴うことを注意しておこう。

以後は、無次元化された物理量のみを取り扱うので、それを示す * 記号を省略する。

いろいろな物理量の中で、とくに流速 u と変動圧力 p に着目しよう。線形化に関する若干の計算を行った後に、それらが次の方程式によって支配されることがわかる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \bar{c}^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{c}^2(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \quad (11), (12)$$

(11) あるいは (12) は、非一様な媒質中の音波に対する波動方程式である。これらは通常の波動方程式とは異なり、 $\bar{c}$ が x の関数であるために、任意の $\bar{c}(x)$ に対して、一般解を得ることはできない。ただし、以下にみるように $\bar{c}(x)$ が特定の関数形を有する場合には厳密解を得ることができる。そこで、さらに次の変数変換を行う。

$$\frac{u}{M} = \sqrt{\bar{c}} U, \quad \frac{p}{M} = \frac{P}{\sqrt{\bar{c}}}, \quad \frac{\rho}{M} = \frac{Q}{\sqrt{\bar{c}}}, \quad z = \int_0^x \frac{dx}{\bar{c}(x)}. \quad (13)$$

ここに、 $M \equiv u_0/c_0$ は Mach 数であり、波の非線形性の強さを示すパラメータである。いま線形波を取り扱っているので、 $M \ll 1$ でなければならない。

変換 (13) を (11) と (12) に施せば、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\bar{c}(z)} \left(\frac{\bar{c}'(z)}{[\bar{c}(z)]^{3/2}} \right)' U = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\bar{c}(z)}} \left(\frac{\bar{c}'(z)}{\sqrt{\bar{c}(z)}} \right)' P = 0, \quad (15)$$

となる。ただし、プライム (') は z に関する微分を表わす。境界条件 (7) は、

$$U = \sin t \quad (z = 0 \text{ において}) \quad (16)$$

と書ける。

厳密解が得られる 3 つの場合について考察しよう。

Case (a) $\bar{\rho}(x) = (1 + \alpha x)^{-4}$

$\alpha > 0$ のときには、 x 方向に初期密度が急激に減少してゆき、 $\alpha < 0$ のときには、初期密度が急激に増加してゆく場合である。このとき、 $\bar{c}(z) = (1 - \alpha z)^{-2}$ であるから、流速 U は波動方程式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (17)$$

に従う。境界条件 (16) を満足するこの方程式の進行波解は、明らかに $U = \sin(t-z)H(t-z)$ である ($H(t)$ は Heviside 関数であり、 $t \geq 0$ に対して $H(t) = 1$ 、 $t < 0$ に対して $H(t) = 0$ である)。したがって、本来の無次元流速 u が、 x と t の関数として、

$$\frac{u}{M} = (1 + \alpha x) \sin \phi(x, t) H[\phi(x, t)], \quad \phi(x, t) \equiv t - \frac{x}{1 + \alpha x} \quad (18)$$

のようにもとまる。 $\phi = \text{const.}$ が波面を表わし、その伝播速度 (音速) が、 $\bar{c}(x) = (1 + \alpha x)^2 (= (1 - \alpha z)^{-2})$ であることも、直ちに検証できる。音速は、 $\alpha > 0$ のときには、 x とともに増加するが、 $\alpha < 0$ のときには減少する。波長は、

$$\lambda \equiv 2\pi \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^{-1} = 2\pi(1 + \alpha x)^2 \quad (19)$$

によって定まる。したがって、 $\alpha > 0$ のときには、波長は x とともに増加するが、 $\alpha < 0$ のときには減少する。波の速度振幅に関しても同様の特性がみられる。 $\alpha > 0$ の場合、波の先端は有限の時間で無限遠点に達する。 $\alpha < 0$ の場合には、 $x = 1/|\alpha|$ で密度が無限大 (音速はゼロ) となるが、波頭が有限の時間でこの点に到達することはできない。

Case (b) $\bar{\rho}(x) = (1 + \alpha x)^{-2}$

Case (a) と比べて、密度 $\bar{\rho}(x)$ の変化がすこしゆるやかな場合である。このとき、 $\bar{c}(z) = \exp(\alpha z)$ であるから、流速 U は Klein-Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \mu^2 U = 0, \quad (\mu = \alpha/2) \quad (20)$$

に従う。この方程式は、分散波動系の一つとしてよく知られている。境界条件 (16) に対する (20) の解は、ラプラス変換を利用すると容易にもとまる：

$$U(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \exp \left[st - (s^2 + \mu^2)^{1/2} z \right] \frac{ds}{s^2 + 1}. \quad (21)$$

ここに、 δ はある正の定数である。解 (21) の漸近的なふるまいは、最大降下法 (method of steepest descents) を用いて調べることができる。³ 結果を記すと、

$$U(z, t) \sim \sin \left(t - \frac{z}{v_p} \right) H[v_g t - z] - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \frac{(1 - m^2)^{1/4}}{m} \cos \left(\omega_0 t - k_0 z + \frac{\pi}{4} \right), \quad (\mu < 1), \quad (22)$$

ここに、 $v_p (= 1/\sqrt{1 - \mu^2})$ は位相速度、 $v_g (= \sqrt{1 - \mu^2})$ は群速度を表わす。また、 $m = z/t (< 1)$ 、 $\omega_0 = 1/\sqrt{1 - m^2}$ 、 $k_0 = m/\sqrt{1 - m^2}$ である。十分に時間が経過した後は右辺の第 1 項が卓越し、その項は波頭が群速度 v_g で進み、波面 (定位相面) が位相速度 v_p で前進する波列を表わしている ($v_p > v_g$ に注意)。

$\mu > 1$ の場合には、伝播するモードはもたず (evanescent mode), 漸近解は

$$U(z, t) \sim H \left[t \sqrt{\mu^2 - 1} - z \right] \sin t \exp \left(-\sqrt{\mu^2 - 1} z \right) \quad (23)$$

で与えられる.

Case (c) $\bar{\rho}(x) = (1 + \alpha x)^{-4/3}$

このとき, $\bar{c}(z) = (1 + \alpha z/3)^2$ であるから, 圧力 P が波動方程式を満足する:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (24)$$

境界条件が P に対してではなく, U に対して課せられていることを考慮して, 問題を解き

$$P = \frac{\gamma}{1 + (\alpha/3)^2} \left\{ \sin(t - z) + \frac{\alpha}{3} \left[\cos(t - z) - \exp \left(-\frac{\alpha}{3}(t - z) \right) \right] \right\} H(t - z) \quad (25)$$

を得る.

Case (a) とは異なり, $\alpha > 0$ の場合に, 波頭が無遠点に達するには無限大の時間がかかる. また, $\alpha < 0$ の場合には, 波頭が, 反射点 ($x = 1/|\alpha|$) に有限の時間で到達し, それ以後の時刻に対しては, (25) の表現は適切ではない. 解 (25) は, 指数関数的に減衰する項, つまり過渡現象を示す項を含んでいることを注意しておこう.

§3. 非線形問題

弱い非一様性の効果を考慮にいれて, 弱い非線形効果と散逸効果が, 遠方場において競合するような情况进行よう. このような状況下では, 単純な正則摂動論は適用できなくて (特異摂動問題), 多重尺度法 (method of multiple scales) を用いて問題を解く. まず, この波動現象を記述する一般化された Burgers 方程式の導出を行う.

基礎方程式 (1), (2), (8) から出発して, これらに対して §2 で行った規格化 (9), (13) を施す. その結果得られた方程式系の従属変数に関して, 音響 Mach 数 M による次の展開を行う:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} M^{n-1} U_n, \quad P = \sum_{n=1}^{\infty} M^{n-1} P_n, \quad Q = \sum_{n=1}^{\infty} M^{n-1} Q_n, \quad (M \ll 1). \quad (26)$$

(散逸性流体に対しては, (6) は方程式系 (1)–(5) を厳密には満たさないが, 散逸性と非一様性が弱いので, これを一つの準定常解とみなすことができ, (6) の状態を基準として摂動を考えている.) 独立変数に関しては, 次のような多重尺度を導入する:⁴

$$t_n = M^n t, \quad z_n = M^n z, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (27)$$

これによって, 微分演算に関して, たとえば,

$$\frac{\partial}{\partial z} U_m(z_0, z_1, \dots; t_0, t_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \frac{\partial U_m}{\partial z_n}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (28)$$

のような展開式が成立する.

このような独立変数に関する微分展開をさらに基礎方程式系に対して行う. 結局 U の最低次の摂動解 U_1 が, 早く変動する現象を記述する変数 z_0 および t_0 に関して, 永年項をもたないという条件から次式を得る:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z_1} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{1}{\sqrt{\bar{c}(z_1)}} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2}, \quad (\tau = t_0 - z_0). \quad (29)$$

ただし, Re は音響 Reynolds 数であり, 次式のように定義される.

$$Re = \frac{(\gamma + 1)c_0 u_0}{\delta \omega}. \quad (30)$$

分母にあらわれる $\delta \equiv (\eta/\rho_0)[(4/3) + (\zeta/\eta) + (\gamma - 1)\kappa/\eta c_p]$ は音の拡散率とよばれている。さらに, z_1 にかわり

$$\sigma = \int_0^{z_1} \frac{(\gamma + 1)}{2\sqrt{\bar{c}(z_1)}} dz_1 \quad (31)$$

のような距離を導入すると, (29) は, U_1 の下添字 1 を省き

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{\bar{c}(\sigma)}}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad (32)$$

と書ける。これが, はじめに述べた一般化された Burgers 方程式である。

ここでは, $Re \rightarrow \infty$ の場合の (32) の解のふるまいについて言及するにとどめる。衝撃波形成の前には, (32) の右辺は無視できて, 支配方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (33)$$

となる。⁵ これは, 一様媒質中の弱非線形波動伝播を記述する式と全く同形であり, 境界条件 (16) を満足する (33) の厳密解は, パラメータ ξ を用いた表示で

$$U = \sin \xi, \quad \xi = \tau + \sigma \sin \xi \quad (34)$$

と表わされる。周知のように, 衝撃波形成距離は, $\sigma = 1$ である。

衝撃波形成後は, (34) は多価の解となるが, これに等面積則を適用すると波動伝播を簡単に解析できる。⁶ 伝播とともに, 最前部の正の位相をもつ波は三角波に漸近し, それに続く波列は鋸歯状波に漸近していく。三角波の振幅と幅は

$$U_s = 2\sqrt{\sigma - 1}/\sigma, \\ \pi - \tau_s = 2 \left(\sqrt{\sigma - 1} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) \quad (35)$$

で与えられる。⁷ また, 鋸歯状波を表わす漸近解は

$$U_s = \begin{cases} \frac{\pi - \tau}{1 + \sigma} & (0 \leq \tau < \pi) \\ -\frac{\pi - \tau}{1 + \sigma} & (-\pi \leq \tau < 0) \end{cases} \quad (36)$$

で与えられる。したがって, (13), (31) 等を用いると, もとの変数で表現された解を得ることができる。

参考文献

- 1) A. Pierce: *Acoustics* (Acoustical Society of America, New York, 1989).
- 2) L. M. Brekhovskikh: *Waves in Layered Media* (Academic Press, New York, 1960).
- 3) S. A. Thau: *Nonlinear Waves* ed. S. Leibovich and A. R. Seebass (Cornell University Press, Ithaca, 1974) p. 44.
- 4) A. H. Nayfeh: *Perturbation Methods* (Wiley, New York, 1973).
- 5) A. H. Nayfeh: *J. Acoust. Soc. Am.* **57** (1975) 1413.
- 6) G. B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).
- 7) 井上 良紀: 乱れと波の非線形現象 (井上 良紀・木谷 勝 編) (朝倉書店, 1993) p. 62.

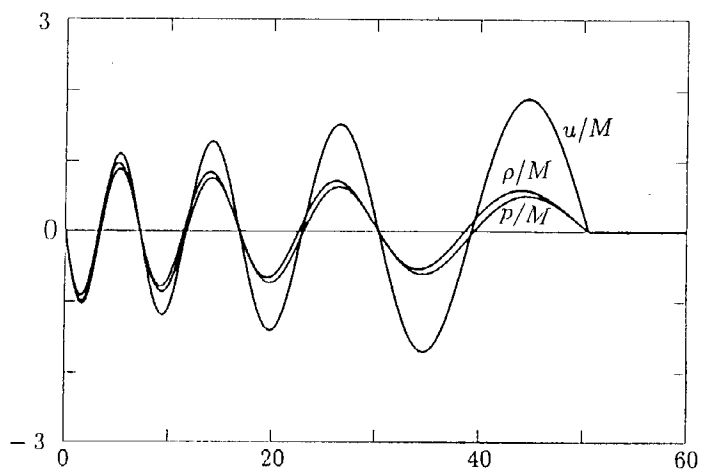


图 1. 線形波 — 流速, 压力, 密度波形
i) $\bar{c} = (1 + \alpha x)^2$, $\alpha = 0.02$, $t = 8\pi$

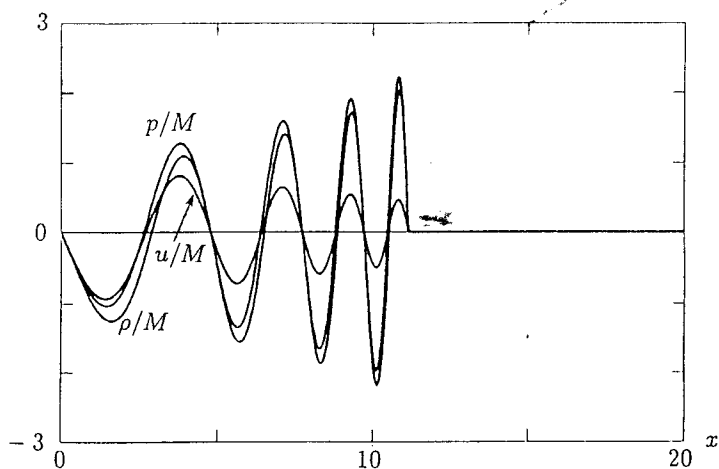


图 2. 線形波 — 流速, 压力, 密度波形
i) $\bar{c} = (1 + \alpha x)^2$, $\alpha = -0.05$, $t = 8\pi$

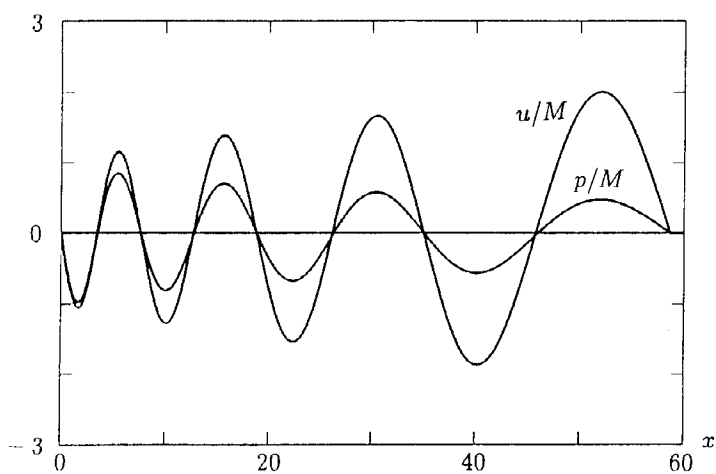


图 3. 線形波 — 流速, 压力, 密度波形
ii) $\bar{c} = 1 + \alpha x$, $\alpha = 0.06$, $t = 8\pi$

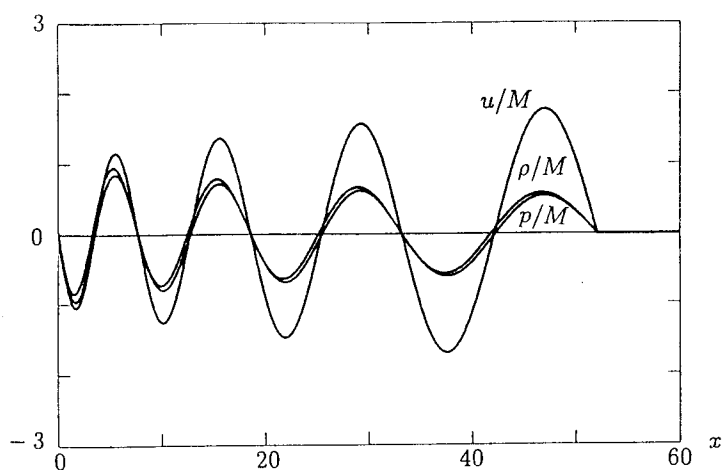


图 4. 線形波 — 流速, 压力, 密度波形
iii) $\bar{c} = (1 + \alpha x)^{2/3}$, $\alpha = 0.1$, $t = 8\pi$

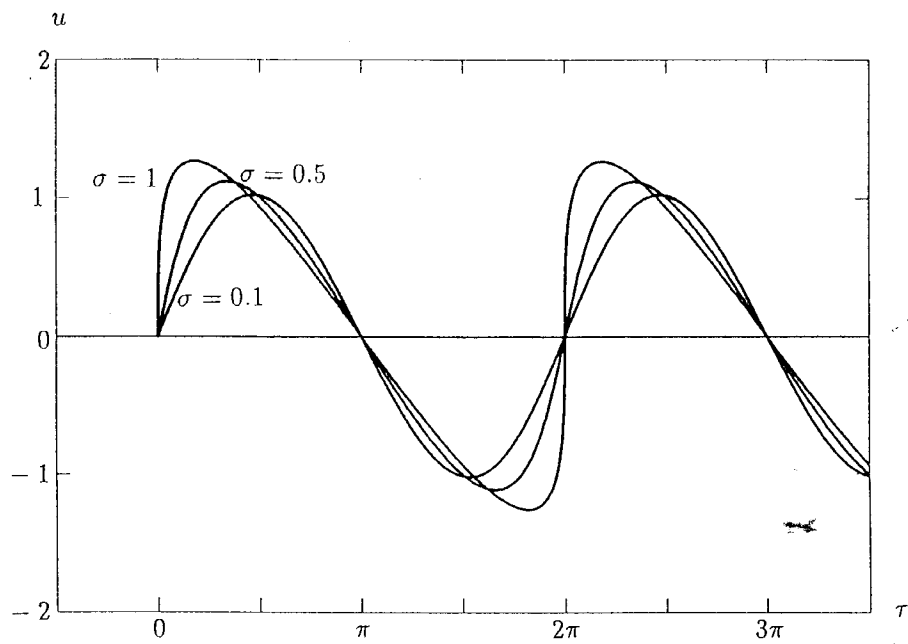


図 5. 非線形波 — 衝撃波形成時までの流速波形の歪み
ii) $\bar{c} = 1 + \alpha x$, $\alpha = 0.005$, $M = 0.01$, $\gamma = 1.4$

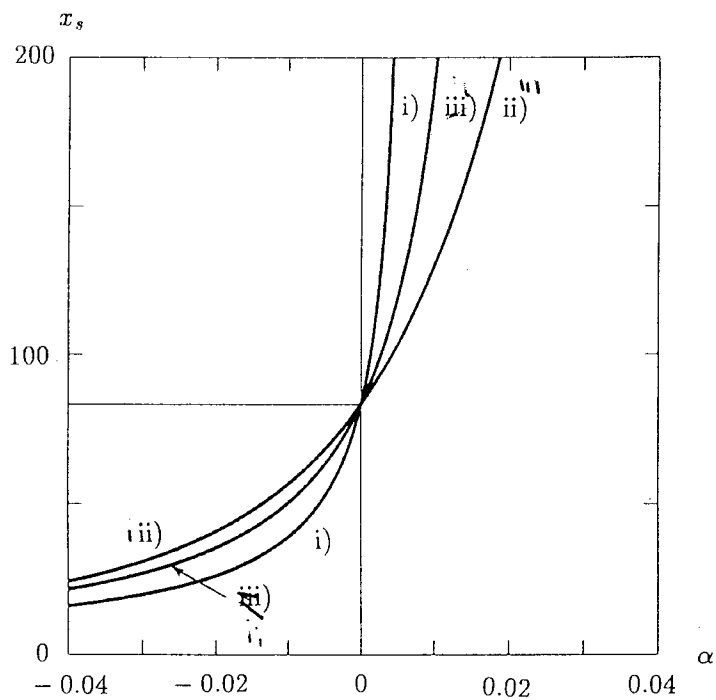


図 6. 衝撃波形成距離 x_s の α 依存性

- i) $\bar{c}(x) = (1 + \alpha x)^2$
- ii) $\bar{c}(x) = 1 + \alpha x$
- iii) $\bar{c}(x) = (1 + \alpha x)^{2/3}$

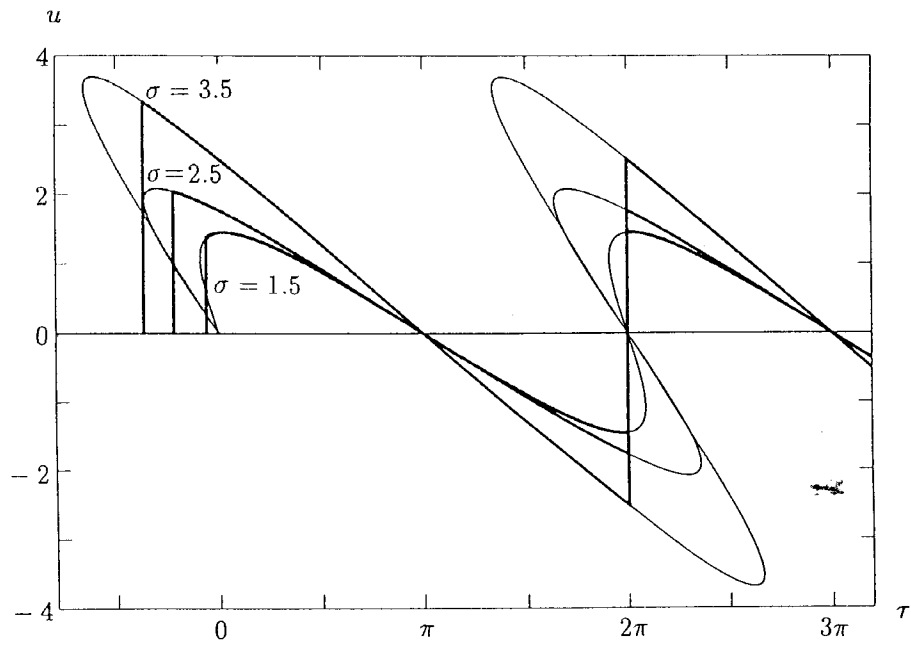


図 7. 衝撃波形成後の等面積則による波形の決定

ii) $\bar{c} = 1 + \alpha x$, $\alpha = 0.005$, $M = 0.01$, $\gamma = 1.4$

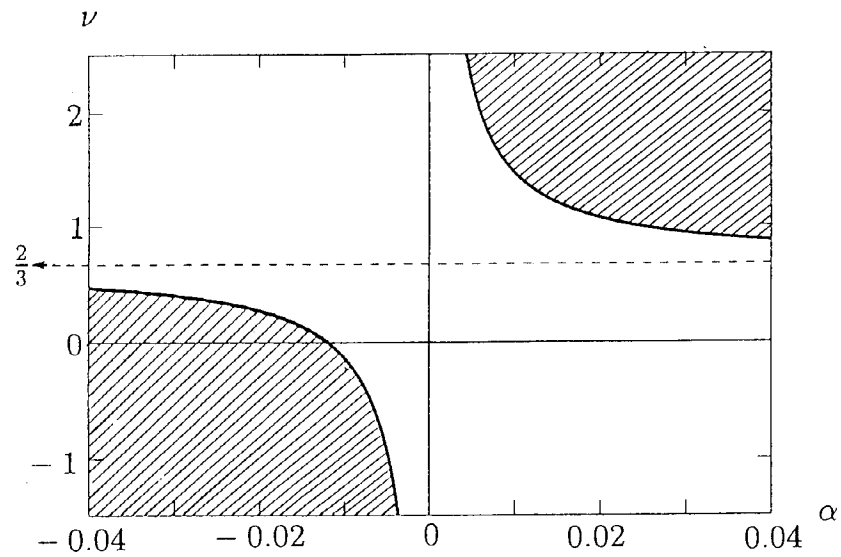


図 8. 衝撃波形成条件: $\bar{c}(x) = (1 + \alpha x)^\nu$

斜線部では衝撃波は形成されない。