

二次元導波路を伝播する強非線形音波と衝撃波

北大工

矢野 猛・井上良紀

1. はじめに

無限に長い平行な平面壁の間の気体中を壁に沿う方向 (x^* 方向) に伝播する線形音波は、壁の間隔 L と音源の角振動数 ω に依存する位相速度をもつ分散性の波である。しかし、正弦振動する音源における流速の最大振幅 u_0 の音速 c_0 に対する比 $M \equiv u_0/c_0$ が 1 に比べて十分小さいが有限で (弱非線形), $\Omega \equiv L\omega/c_0$ が π に比べて大きく、かつ、散逸が無視できる場合には、波形は非線形効果によって伝播とともに徐々に歪められるが、分散性はあまり効かず、遠方で衝撃波が形成されることが解析的に示されている ($\Omega = \pi$ は遮断周波数に対応する).^{1,2)}

本研究では、〈第一モード〉で正弦振動する音源から放射される $M = O(1)$ かつ $\pi < \Omega = O(1)$ の強非線形音波の伝播と衝撃波の形成と発展の過程を、Osher と Chakravarthy による高解像度風上差分法³⁾を用いて数値的に解析する。ただし、散逸は衝撃波面を除いて無視できるとする。

2. 問題

無限に長い平行な平面壁の間が静止一様状態の理想気体で満たされている (二次元導波路)。壁に沿って x^* 軸をとり、 $x^* = 0$ にある音源が、時刻 $t^* = 0$ から、〈第一モード〉で最大振幅 a 、角振動数 ω の正弦振動を開始し、 x^* 軸の正方向に音波を放射する (図 1 参照)。

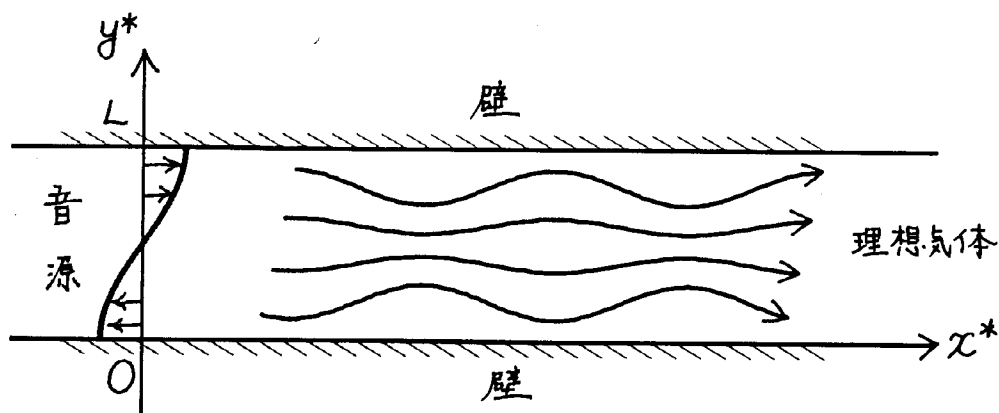


図 1. 二次元導波管を伝播する第一モードの音波の概念図

次の仮定をおく.

- (1) 音響 Mach 数: $M \equiv u_0/c_0 = O(1)$. ここで, $u_0 = a\omega$ は音源における流速の最大値であり, c_0 は初期の静止一様状態の音速を表す. $M = O(1)$ の問題を強非線形問題という ($M \ll 1$ が弱非線形である). このとき, 非線形効果による波形歪みや衝撃波の形成は近傍場で生じる.
- (2) 音響 Reynolds 数: $Re \equiv c_0 u_0 / \delta \omega \rightarrow \infty$. ただし, δ は音の拡散率. この条件によって, 衝撃波面を除いて粘性と熱伝導性による波のエネルギーの散逸を無視することが許される. また, 本研究は壁面での摩擦を考慮しないが, これは, 壁面上の境界層が十分に薄く, かつ, 剥離や乱流遷移が生じないことを仮定していることに対応する.
- (3) 無次元角振動数: $\pi < \Omega \equiv L\omega/c_0 = O(1)$. ここで, L は壁の間隔である. $\omega_c = \pi c_0 / L$ は線形音波の cut off 振動数に対応する (3 節参照).

無次元変数を用いると, 支配方程式と境界条件および初期条件は以下のように表される.
支配方程式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial[(E_t + p)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(E_t + p)v]}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

境界条件:

$$h \equiv x - M(\cos t - 1) \cos \frac{\pi y}{\Omega} = 0 \text{ において } \frac{Dh}{Dt} = 0 \quad (5)$$

$$y = 0, \Omega \text{ において } v = 0 \quad (6)$$

初期条件 ($t = 0$):

$$u = v = 0, \quad p = 1/\gamma, \quad \rho = 1 \quad (7)$$

ただし, $x = \omega x^*/c_0$ は無次元座標, $t = \omega t^*$ は無次元時間, $u = u^*/c_0$ は無次元流速の x 方向成分, $v = v^*/c_0$ は無次元流速の y 方向成分, $\rho = \rho^*/\rho_0$ は気体の無次元密度, $p = p^*/\gamma p_0$ は無次元圧力, $E_t = (1/2)\rho(u^2 + v^2) + p/(\gamma - 1)$ は無次元化された気体の単位体積当たりの全エネルギーである. 上記の初期境界値問題を Osher と Chakravarthy による高解像度風上差分法を用いて数値的に解く.

3. 線形問題

音響マッハ数 $M \rightarrow 0$ の極限が線形問題である。とくに、 $Re \rightarrow \infty$ である場合、たとえば圧力変動に対する解は

$$\begin{aligned} \frac{p - (1/\gamma)}{M} &= -\frac{1}{\kappa} \cos \frac{\pi y}{\Omega} \sin(t - \kappa x) \\ &\quad + \cos \frac{\pi y}{\Omega} \int_t^\infty \cos(t - \tau) J_0\left(\frac{\pi}{\Omega} \sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \left[\sin\left(t - \kappa x - \frac{\pi y}{\Omega}\right) + \sin\left(t - \kappa x + \frac{\pi y}{\Omega}\right) \right] \\ &\quad + \cos \frac{\pi y}{\Omega} \int_t^\infty \cos(t - \tau) J_0\left(\frac{\pi}{\Omega} \sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

と与えられる。ただし、 $\kappa = \sqrt{1 - (\pi/\Omega)^2}$ とする。右辺の積分を含む項は $t \rightarrow \infty$ においてゼロになる。すなわち、 $t \rightarrow \infty$ の極限で現象は定常状態に達し、波動場は x 軸に対して角度 $\pm \arctan(\pi/\kappa\Omega)$ をなす斜め方向に伝播する二つの線形平面波の重ね合わせで表される ($\Omega > \pi$ のとき)。また、 $\Omega (> \pi)$ が π に近づくとつれて、 κ が小さくなるために、波の振幅が増大する。

弱非線形問題では、近傍場のふるまいは第一近似では線形音波のそれとみなしてよい。非線形効果は遠方場で徐々に蓄積し、ついには衝撃波が形成されることが知られている。^{1,2)}

4. 強非線形問題

数値計算によって得られた強非線形波の伝播過程の特徴を以下に示す。

図 2(a)–(d) に、 $M = 0.1$, $\Omega = 6\pi$ の場合の $t = 20\pi$ における圧力、密度、流速の x 成分、流速の y 成分の波形を示す。図 3(a)–(d) には、 $M = 0.1$, $\Omega = 4\pi$ の場合の $t = 30\pi$ における圧力、密度、流速の x 成分、流速の y 成分の波形を示す。図 2 と図 3 を比較すると、同じ M に対しても、 Ω が小さい方が非線形効果が強く現れていることがわかる。どちらの図においても、音源から数波長の領域において非線形効果による波形歪みが顕著になり、一方の壁面から他方の壁面に向かって湾曲した衝撃波面が形成される。音源から十波長程度離れた領域では、衝撃波は壁面上で交差 (反射) する。

図 4(a)–(d) に、 $M = 0.2$, $\Omega = 4\pi$ の場合の $t = 30\pi$ における圧力、密度、流速の x 成分、流速の y 成分の波形を示す。この場合、音源から放射された音波はただちに衝撃波になり、音源の近傍で鱗状の衝撃波面を形成する。密度を示す図 4(b) および流速の x 方向成分を示す図 4(c) を見ると、衝撃波の交差点をとる接触不連続面、すなわち、渦層が発生していることがわかる。

音波は音源から連続的に放射されるので、次々と発生する衝撃波は音源近傍で交差を繰り返し、渦を生成する。図 5(a)(b) と 図 6(a)–(c) は、時間平均された渦度の大きさ

$$\frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt \quad (9)$$

の時間変化を等高線で示したものである。初期時刻 $t = 0$ には渦なしであったものが、時間とともに渦度が増大していく様子が示されている。平均の渦度は音源の近傍の最初の衝撃波の交差点に最も強く集中し、そこから接触不連続面の軌跡に沿ってのびる細長い領域に局在している。

図 7(a)(b) および図 8(a)-(c) に、音響流、すなわち、時間平均された質量流束ベクトル

$$\frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \end{pmatrix} dt \quad (10)$$

の分布を示す。時間が経過するにつれて音響流の流れ模様は変化していき、やがて音源近傍に二つの渦状の循環流を生じる。循環流が生じた後は、流れ模様はあまり変化せず、渦の中心部の流速が時間とともに大きくなっていく。

図 9 に、時間平均された密度の等高線を示す。この図から、音源近傍の渦度が強く局在している領域の気体の密度が低下していることがわかる。その領域は、渦状の音響流の中心部とほぼ一致しており、音響流によって気体が遠方へと運びされた結果として、密度が低下したといえる。このような、衝撃波によって生成される渦が強く局在する領域に循環的な音響流が形成され、それによって気体の密度が低下していく現象は、先に著者らによって調べられた円形ピストンの強非線形問題⁴⁾で見いだされた現象と極似している。

5. まとめ

本研究で得られた、二次元導波路を伝播する第一モードの強非線形波の主な特徴を以下に要約する：

- (1) 強い非線形効果によって、衝撃波は近傍場で形成される (弱非線形波の衝撃波形成点は遠方場である)。
- (2) 衝撃波面は湾曲している。
- (3) M が小さいときには ($M \lesssim 0.1$)、衝撃波面の交差点は壁面上である。 M が大きくなると ($M \gtrsim 0.2$)、音源近傍の衝撃波面は気体中で交差する。音源から離れると ($x \gtrsim 30\pi$)、衝撃波は減衰し、その波面は平面状になり、衝撃波の交差点も壁面に近づく。
- (4) 衝撃波面が気体中で交差するとき、交差点をとる接触不連続面 (渦層) が現れる場合がある。
- (5) 衝撃波の交差によって生じた渦は、おおむね、生成された位置にとどまり、時間とともに“蓄積”される。
- (6) 平均の質量流 (音響流) は、渦が蓄積するのにともない、渦が強く局在する点を中心とする循環流へと成長する (弱非線形問題で発生する音響流は循環しない)。
- (7) 音響流は気体を遠方へと運び、渦の中心の近傍で気体の密度が低下する (弱非線形の第一近似では密度は低下しない)。

参考文献

- 1) J. H. Ginsberg, "Finite amplitude two-dimensional waves in a rectangular duct induced by arbitrary periodic excitation," J. Acoust. Soc. Am. **65**, 1127-1133 (1979).
- 2) M. F. Hamilton and J. A. TenCate, "Finite amplitude sound near cutoff in higher-order modes of a rectangular duct," J. Acoust. Soc. Am. **84**, 327-334 (1988).
- 3) S. Osher and S. R. Chakravarthy, "Very high order accurate TVD schemes," in *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness* edited by C. Dafermos, J. Ericksen, D. Kinderlehrer, and M. Slemrod (Springer-Verlag, New York, 1986), Vol 2, pp.229-274.
- 4) T. Yano and Y. Inoue, "Strongly nonlinear waves radiated by a circular piston," in *Advances in Nonlinear Acoustics*, edited by H. Hobæk (World Scientific, Singapore), pp.583-588 (1993).

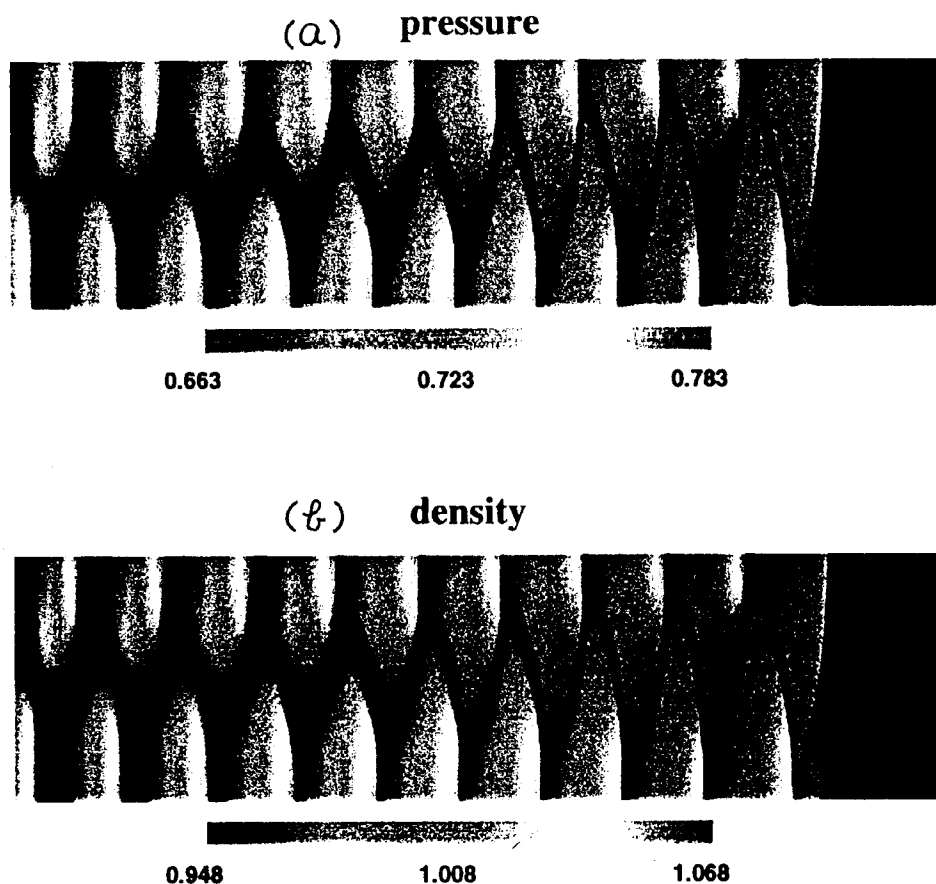
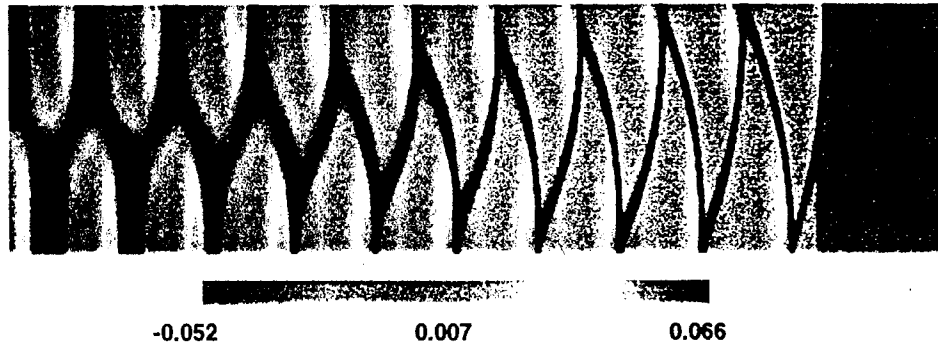
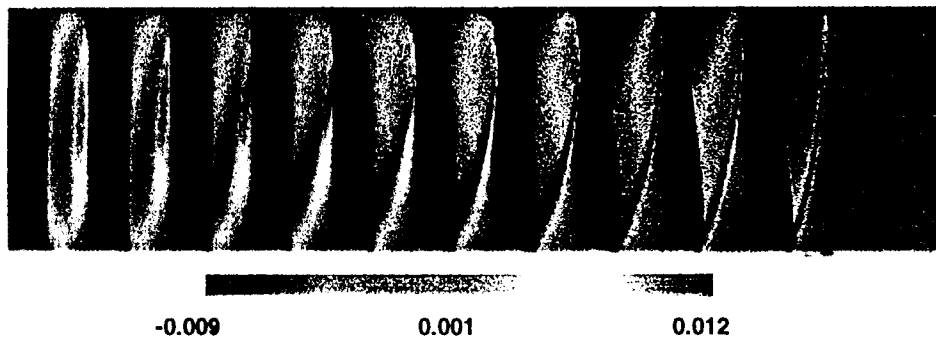


図2. $M=0.1$, $\Omega=6\pi$, $t=20\pi$

(c) axial velocity

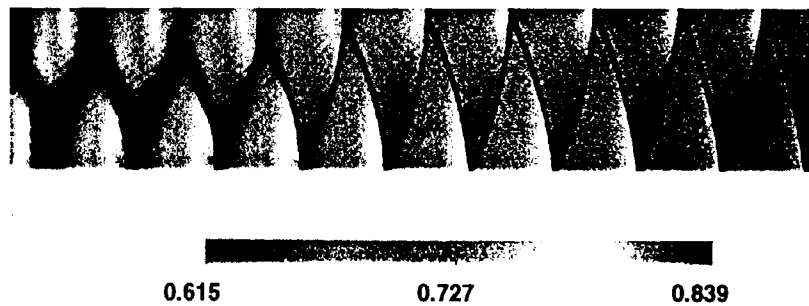


(d) transversal velocity

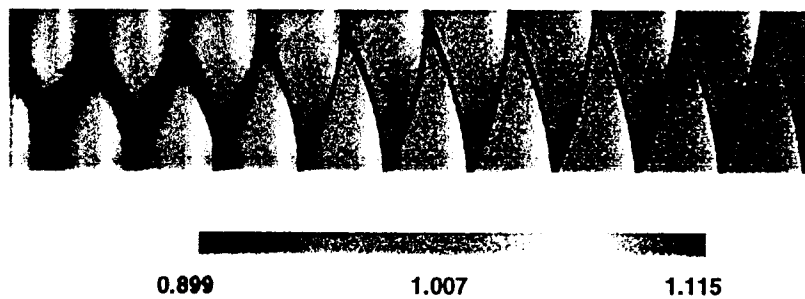


2. $M=0.1$, $\Omega=6\pi$, $t=20\pi$

(a) pressure

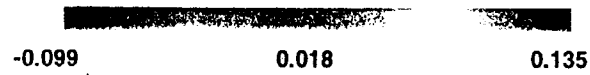
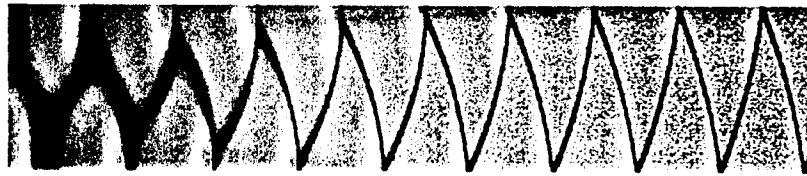


(b) density



3. $M=0.1$, $\Omega=4\pi$, $t=30\pi$

(c) axial velocity



(d) transversal velocity

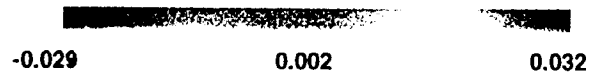
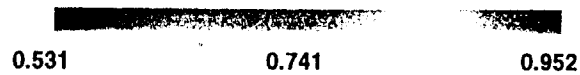


图 3. $M=0.1$, $\Omega=4\pi$, $t=30\pi$

(a) pressure



(b) density

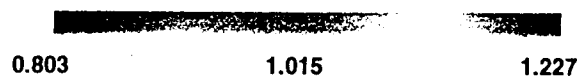
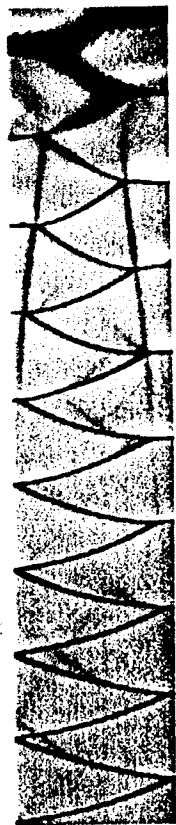


图 4. $M=0.2$, $\Omega=4\pi$, $t=30\pi$

(c) axial velocity



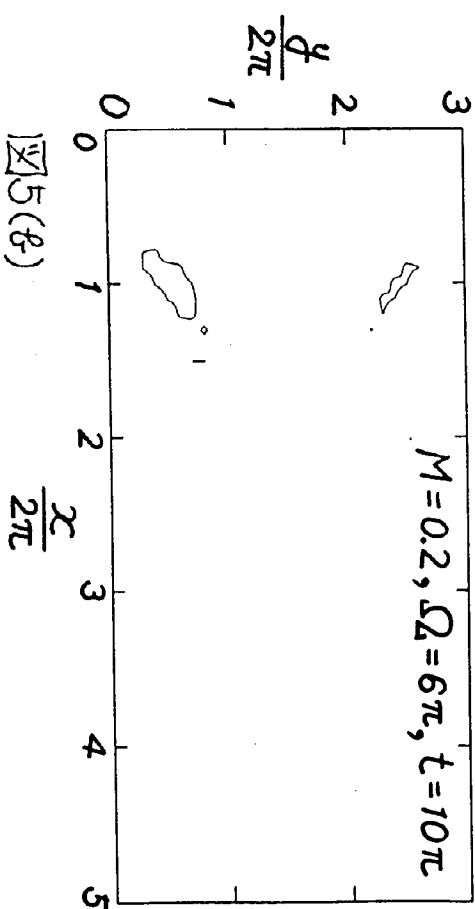
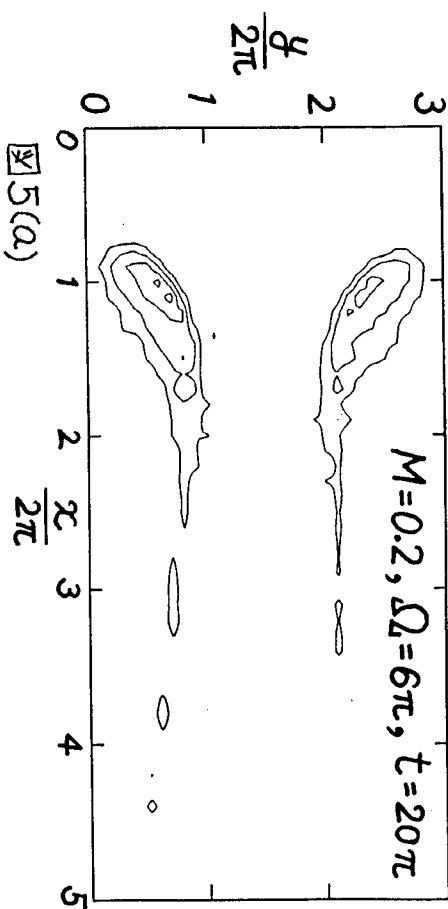
(d) transversal velocity



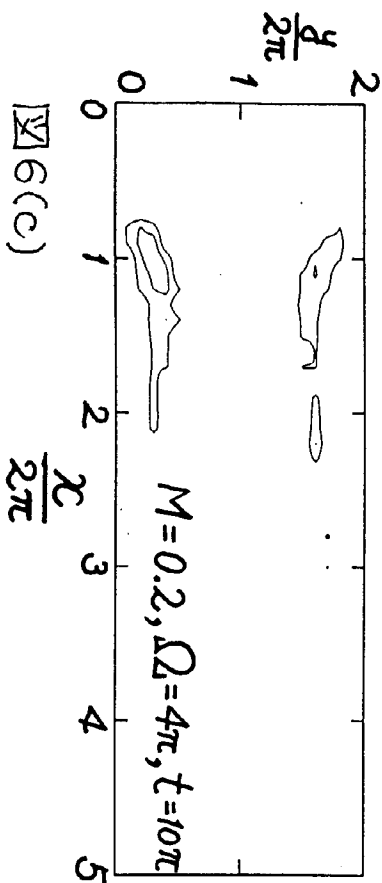
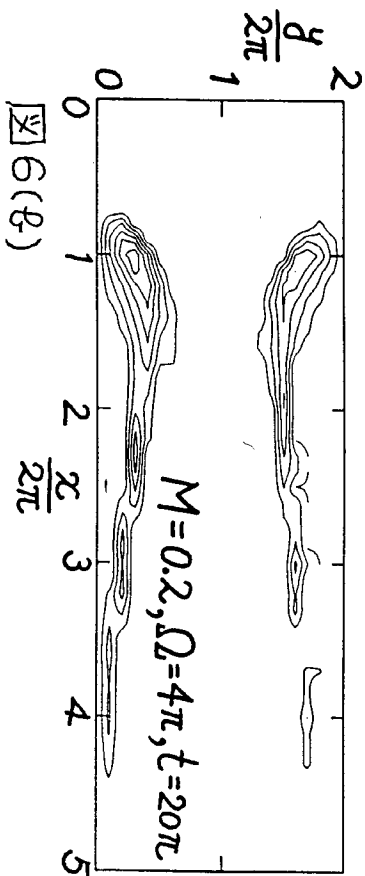
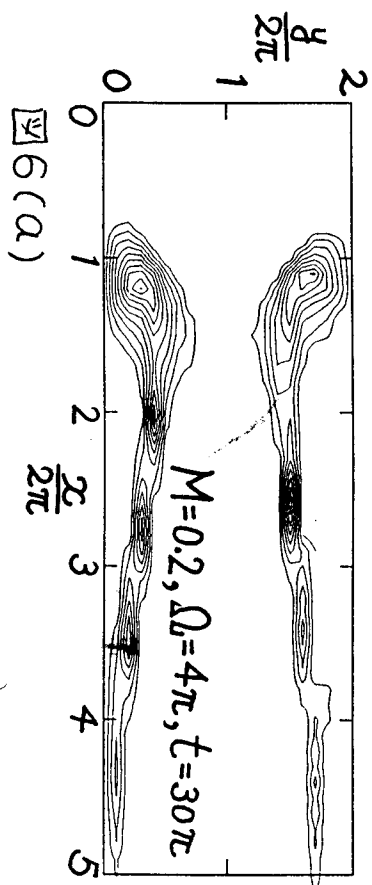
図4. $M=0.2$, $\Omega=4\pi$, $t=30\pi$

時間平均された渦度

$$\frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

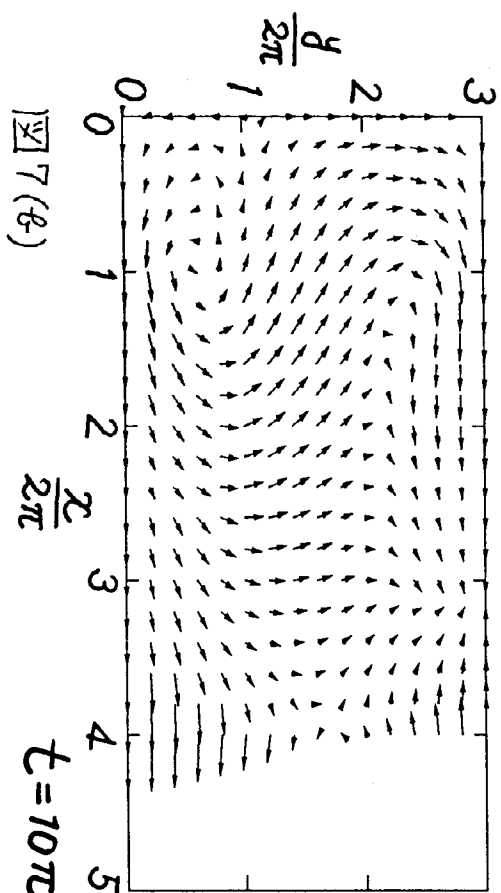
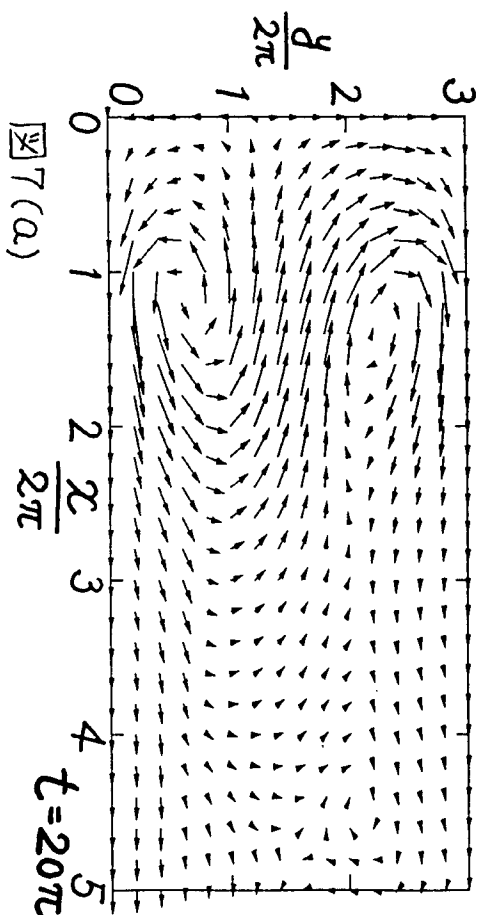


時間平均された渦度

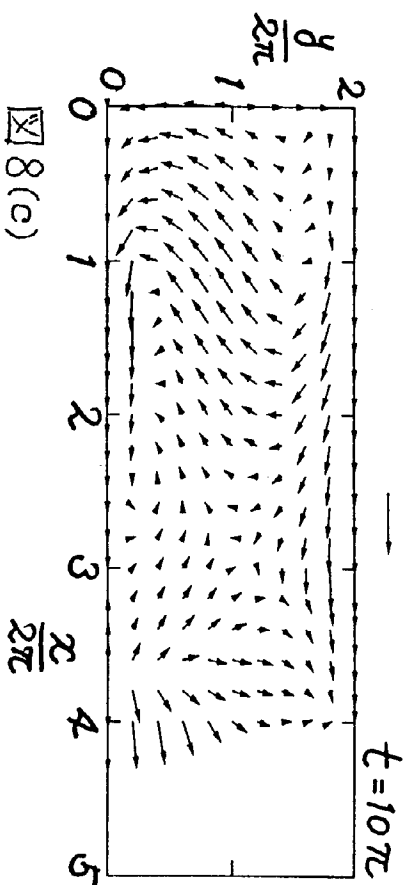
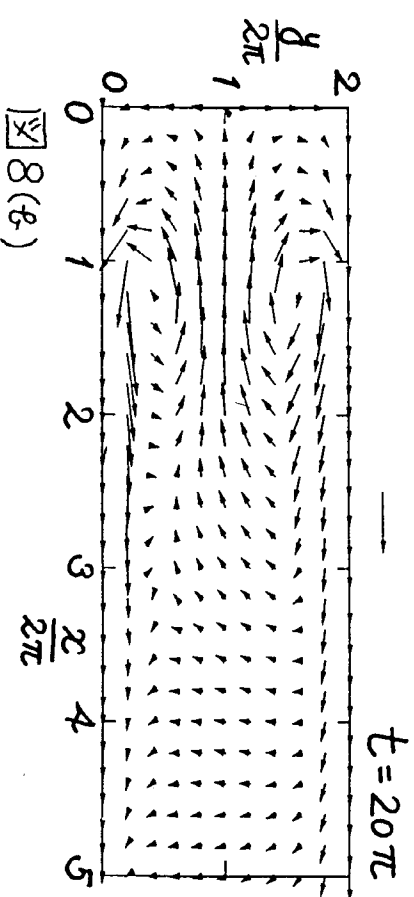
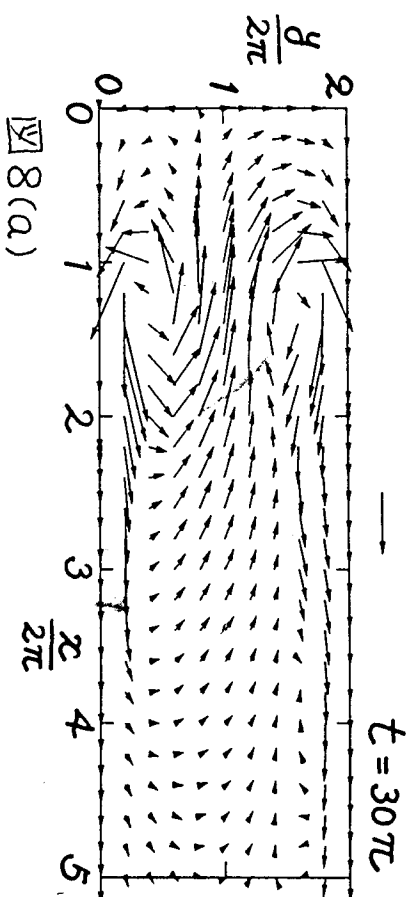


時間平均された質量流(音響流)

$$\frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} \left(\frac{\rho u}{\rho v} \right) dt$$



音響流



$$M=0.2, \Omega=4\pi$$

時間平均された密度

$$\frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} \rho dt$$

