

強い水中衝撃波の伝播 — 等面積則による解析

北大工 井上 良紀, 矢野 猛

前回の研究会で, 水中を進行する強い平面衝撃波の伝播過程は, その非線形性があまり大きくなければ (moderate nonlinearity のとき), 周知の Burgers 方程式によってよい精度で記述され得ることを数値解析によって示した [1].

今回も, 音源 (無限に広い平板) が調和振動するとき, 右方の半空間に放射される平面波の伝播に関する初期-境界値問題を再び考察する. 遠方場において対称な波形をもつ鋸歯状波が形成されるいわゆる弱非線形問題は, Burgers 方程式に基づいて精密な解析がなされている. また, 気体中におけるこのような強非線形波の伝播過程について, 音響 Reynold's 数 Re が十分に大きい場合に対しては, 既に解析を行っており, 強非線形波特有の興味ある特性を見出し報告した [2].

よく知られているように, Burgers 方程式は Hopf-Cole 変換によって, 線形熱伝導方程式に替わる. そのため, 当該の弱非線形問題に対しては, 容易に厳密な解をもとめることができる. しかし, ここで取り扱う強非線形問題では, 整合する境界条件が扱いにくい形となるために厳密解を得ることは一般に不可能であると思われる. そこで, ここでは, $Re \rightarrow \infty$ の極限の場合に話を限定することによって, 等面積則を援用して衝撃波の伝播を解析する. 衝撃波の位置を決定する連立超越方程式は, その解が Mach 数 M のべき級数で表されるものとして逐次的に解かれる. 最低次の解は, 弱非線形問題のよく知られている鋸歯状波の解を与え, 第二近似解からは, 高次の非線形効果, たとえば波形の非対称性や音響流の存在が示される.

1. 基礎方程式

水中での平面波の伝播を記述する基礎方程式としては, 通常 of 連続の式と Navier-Stokes 方程式に加えて, エネルギー方程式として Tait の式 [3] が用いられる.

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Navier-Stokes 方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\text{Tait の状態方程式} \quad \frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (3)$$

ここに, ρ は密度, u は流速, p は圧力, η と ζ は第 1 粘性係数と第 2 粘性係数である. 下添字の 0 は, 初期の様な状態における値を示す. また, 簡単のため, $n=7$, $B=3000$ (bar) が (3) においてしばしば用いられる. このとき, エントロピーは一定に保存されることを注意しておく.

2. Burgers 方程式

定常な一次元の強い衝撃波において, Riemann 不変量の一つが衝撃波を横切ってもほぼ保存される (変化しない) という事実は気体力学分野ではよく知られている [1]. 非定常な問題に対しても, この Riemann 不変量が考察している場全体で一定値をとるものと仮定すれば, 前述の基礎方程式から一般化された Burgers 方程式を厳密に導出する事ができる. さらに, 水中においては

波の伝播にともなう密度変化は比較的小さいので、一般化された Burgers 方程式の散逸項に現れる因子 ρ/ρ_0 を 1 とおくと、周知の Burgers 方程式が得られる：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4)$$

ただし、 u/u_0 (u_0 は音源の最大速度) を改めて u と記した。また、 $\tau = [(n+1)/2]M\omega t$, $y = \omega t - kx$ ($k = \omega/c_0$; $c_0 = [n(p_0 + B)/\rho_0]^{1/2}$ は水中の音速) であり、 M と Re は

$$M = \frac{u_0}{c_0} : \text{音響 Mach 数} \quad (5)$$

$$Re = \frac{(n+1)\rho_0 c_0 u_0}{(\zeta + \frac{4}{3}\eta)\omega} : \text{音響 Reynolds 数} \quad (6)$$

3. $Re \rightarrow \infty$ の場合の初期-境界値問題

この場合には、衝撃波が形成される以前は波動現象は単一波方程式によって支配される。 $u/c_0 \rightarrow u$, $\omega t \rightarrow t$ と書き改めて表すと、単一波方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \left(\beta = \frac{n+1}{2}\right) \quad (7)$$

のようになる。また、衝撃波形成後は (7) の解に対して等面積則を適用すると正しい解が得られる。初期条件と境界条件を次のように設定する。

$$\text{初期条件 : } u = 0, \quad (t < 0 \text{ のとき, } x \geq 0 \text{ において}) \quad (8)$$

$$\text{境界条件 : } u = -M \sin t, \quad (t \geq 0 \text{ のとき, } x = M(\cos t - 1) \text{ において}) \quad (9)$$

つまり、最初 $x = 0$ にあったピストンが $t = 0$ に正弦的な振動を始め、右方の半空間にまず膨張波を放射するような場合を考える。

4. 衝撃波形成前の解

(7) の厳密解は、媒介変数 μ を用いて、次のように表すことができる。

$$u = -M \sin \mu, \quad (10)$$

$$y - \mu - M(1 - \cos \mu) = \beta M(t - \mu) \sin \mu \quad (11)$$

(10) と (11) から、衝撃波の形成距離 x_s が求まる：

$$x_s = \left[\frac{2n}{n+1} \sqrt{\nu^2 - 1} \left\{ \nu^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} \right\} - \frac{\nu}{n} \right] \left(\nu^2 - \frac{n+1}{2n} \right)^{-1}. \quad (12)$$

ただし、

$$\nu \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{nM} + \sqrt{\left(\frac{1}{nM} \right)^2 + \frac{2(n+1)}{n}} \right]. \quad (13)$$

5. 衝撃波形成後の解

衝撃波が形成された後においては、(10) と (11) で表される速度波形は多価になり物理的な意味を失う。 $Re \rightarrow \infty$ では、衝撃波は一つの不連続面とみなしてよく、この多価の解に等面積則を適用して衝撃波の位置を定めることができる。等面積則を援用すると、以下の式が成り立つ。

$$\int_{u(\mu_f)}^{u(\mu_r)} (y - y_s) du = 0, \quad (14)$$

$$y_s = \mu_f + \tau \sin \mu_f + M(1 - \cos \mu_f - \beta \mu_f \sin \mu_f), \quad (15)$$

$$y_s = \mu_r + \tau \sin \mu_r + M(1 - \cos \mu_r - \beta \mu_r \sin \mu_r). \quad (16)$$

ここに、 y_s は衝撃波面の y 座標 (位相)、 μ_f と μ_r は衝撃波の直前と直後に対応する媒介変数 μ の値であり、 $\tau \equiv \beta M t$ 。

(14) に、(10) と (11) を用いることによって、積分が実行できて、

$$\begin{aligned} \cos \mu_r - \cos \mu_f + \frac{\tau}{4}(\cos 2\mu_r - \cos 2\mu_f) + M \left[\frac{\beta - 1}{2}(\mu_r - \mu_f) + \frac{2 - \beta}{8}(\sin 2\mu_r - \sin 2\mu_f) \right. \\ \left. - \frac{\beta}{4}(\mu_r \cos 2\mu_r - \mu_f \cos 2\mu_f) \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。一方、(15) と (16) から y_s を消去して、次式を得る。

$$\mu_r - \mu_f + \tau(\sin \mu_r - \sin \mu_f) - M[\cos \mu_r - \cos \mu_f + \beta(\mu_r \sin \mu_r - \mu_f \sin \mu_f)] = 0 \quad (18)$$

(17) と (18) から、 $\mu_f = \mu_f(\tau)$ と $\mu_r = \mu_r(\tau)$ が決まる。

6. M のべきによる摂動展開を用いた解法

ここでは、Mach 数 M が 1 に比べて十分に小さいと仮定して、(17) と (18) を特異摂動展開法を用いて解く。すなわち、 μ_f , μ_r , τ を次のような M のべき級数に展開できるものとする：

$$\left. \begin{aligned} \mu_r &= \pi + \eta + M\eta_1 + M^2\eta_2 + \cdots, \\ \mu_f &= \pi - \eta + M\xi_1 + M^2\xi_2 + \cdots, \\ \tau &= \tau_0 + M\tau_1 + M^2\tau_2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$O(1)$ の問題の解

(19) の展開式を (18) に代入して、次式を得る。

$$\tau_0 = \frac{\eta}{\sin \eta} = \frac{1}{\text{sinc}(\pi\eta)}. \quad (20)$$

これより、衝撃波面を横切った流速 u の跳びの量は、第一近似で

$$\Delta u = 2M \sin \left[\frac{1}{\pi} \text{sinc}^{-1} \left(\frac{1}{\tau_0} \right) \right] \quad (21)$$

のようになる。この最低次の問題に議論を限れば、 $\tau_0 = \tau \equiv \beta M t$ であるから、(20) と (21) は弱非線形理論の鋸歯状波に関する結果と完全に一致する [2]。

$O(M)$ の問題の解

展開式 (19) を (17) と (18) に代入して, $O(M)$ の項をまとめてゼロとおくことによって, 以下の結果を得る.

$$\tau_1 = 4\pi, \quad (22)$$

$$\eta_1 = \xi_1 = \frac{\frac{\eta}{\sin \eta} - \cos \eta + 4\eta \sin \eta}{2\left(1 - \frac{\eta}{\tan \eta}\right)} \quad (23)$$

$$\cong -7 + \frac{3}{2}\eta^2 + \cdots \quad (\eta \ll 1 \text{ のとき}) \quad (24)$$

第 2 近似の範囲内では

$$\eta = \frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}^{-1} \left\{ [4M(t - \pi)]^{-1} \right\}. \quad (25)$$

ただし, ここの計算では $\beta = 4$ ($n = 7$) を用いた.

7. まとめ

強い非線形性による効果を以下に列挙する.

- 1) $\eta \rightarrow 0$ は衝撃波形成時にあたる. このとき, (24) を考慮すると, $u = -7M^2$ となり, 衝撃波は流速の負の位相の部分で形成される. また, (12), (13) によって与えられる衝撃波形成距離は, M が小さいとき,

$$x_s \cong \frac{1}{\beta M} - \frac{n^2 + 2n + 2}{n + 1} M \quad (26)$$

のように近似できる. 右辺第一項は弱非線形理論による結果に等しい.

- 2) 衝撃波面の直前と直後の流速について調べてみよう.

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -M \sin \mu_r \cong M \sin \eta + M^2 \eta_1 \cos \eta \\ u_f &= -M \sin \mu_f \cong -M \sin \eta + M^2 \eta_1 \cos \eta \end{aligned} \right) \quad (27)$$

さらに, 簡単のため, $\eta \ll 1$ とすると

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -7M^2 + M \sin \eta + 5M^2 \eta^2 + \cdots, \\ u_f &= -7M^2 - M \sin \eta + 5M^2 \eta^2 + \cdots, \\ \eta^2 &= 24M \left[t - \left(\frac{1}{4M} + \pi \right) \right] \end{aligned} \right) \quad (28)$$

を得る. これは, 時間の経過に従い, 波形全体が $5M^2 \eta^2$ だけもち上げられていくことを示す. この波形の非対称性が音響流を発生させる.

- 3) 衝撃波の伝播速度を U とする. Burgers 方程式で支配される系においては

$$U = 1 + \frac{1}{2} \beta (u_r + u_f) \quad (29)$$

$\eta \ll 1$ と仮定して, (28) を用いると, 次の結果を得る.

$$U = 1 - 28M^2 + 480M^3 \left[t - \left(\frac{1}{4M} + \pi \right) \right] \quad (30)$$

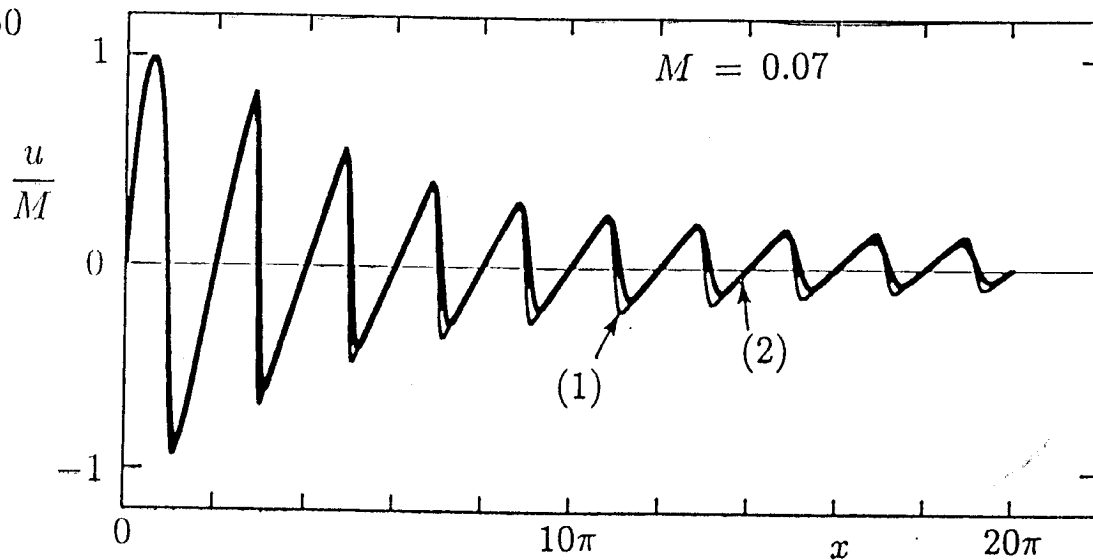
(30) から, (x, t) 面における衝撃波の伝播経路が求まる.

$$x_s(t) = x_s + (1 - 148M^2 - 480\pi M^3)(t - t_s) + 240M^3(t - t_s)^2 \quad (31)$$

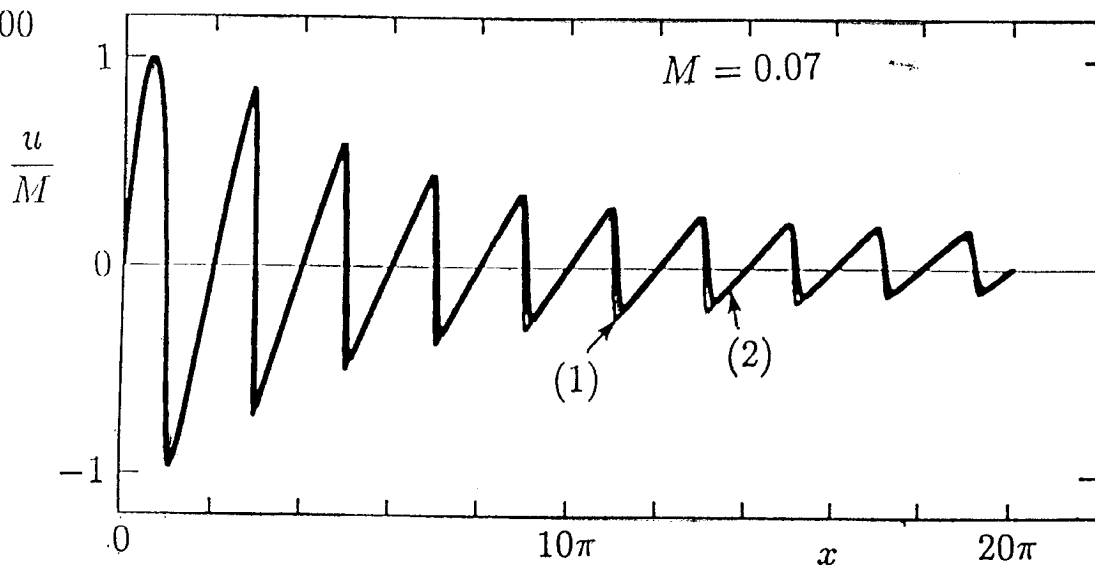
参考文献

- [1] 井上良紀, 矢野猛, “水中における強い平面衝撃波の伝播,” 第 20 回非線形音響研究会資料 (96-2)
- [2] Y. Inoue and T. Yano, “Propagation of strongly nonlinear plane waves,” J. Acoust. Soc. Am. **94**, 1632-1642 (1993)
- [3] R. H. Cole, *Underwater Explosions* (Princeton University Press, 1948)

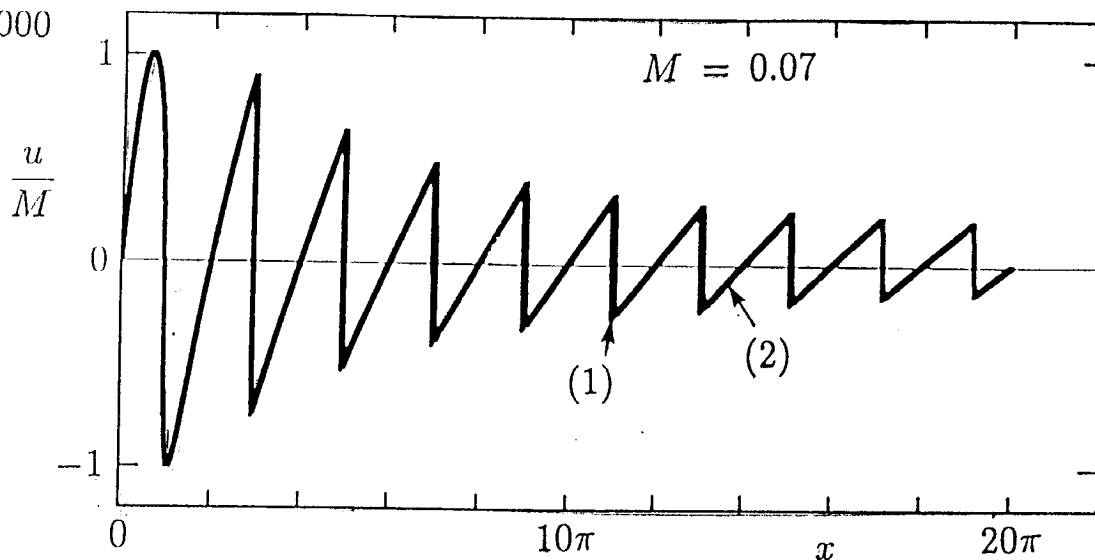
$Re = 50$



$Re = 100$



$Re = 1000$



Osher-Chakravarty 法による基礎方程式系の数値解 (1)
と風上差分法による Burgers 方程式の数値解 (2) の比較