

広開口角集束音源からの非線形音波ビーム*

○石渡 恒夫 (沖電気)

鎌倉 友男 (電通大)

1. はじめに

集束音源はその集束利得を上げることで方位分解能が向上すること、また、焦点で強力な超音波パワーが得られることなどの理由で、超音波非破壊検査装置や医用超音波機器の振動子として多く利用されている。音波集束は、基本的には、振動子の放射面を凹面にすること、平面振動子に音響凹面レンズを取り付けること、アレイ状に並んだいくつかの振動子に対して電子的に位相を制御することで達成される。

集束音波ビームの音響特性を評価するために過去多くの理論が出されているが、非線形ビームの特性評価まで議論した論文は意外と少ない。少ないながらも論文の多くは、Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov の式 (KZK の式) を出発として、非線形性が弱いときにはそれを逐次近似し¹⁾、あるいは強いときは数値的に解析したもの²⁾がほとんどである。KZK の式は、音波の回折、吸収、そして非線形を含めた波動方程式を放物近似して導き出されており、音源からある程度以上離れた、しかも近軸領域で精度よく音場を記述するモデル式として、特に非線形音響分野において多用されている³⁾。しかし Tjøtta らが指摘しているように、KZK の式を集束ビームの解析に適用する場合、半開口角 (音軸から開口を見込んだ角で、以降、 α_0 と記す) が大雑把にいて 16° までである⁴⁾。したがって、例えば変形ビーム方程式 (Transformed beam equation, TBE) のように⁵⁾、KZK の式をビームの進行に合わせて適切に変数変換しても、波動方程式を平面波で展開している限りでは、やはり 16° 以上の集束ビームには変換されたビーム方程式も適用できないことになる。

このほかに広開口角集束ビームの非線形伝搬を取り扱った報告として、有限要素法を利用した解析⁶⁾、流体の基礎方程式そのままを数値的に解く手法⁷⁾がある。しかし、ともに音源の開口が波長の数倍という比較的低周波で低集束利得の場合に限られ、例えば超音波顕微鏡のように高周波で広開口角という現状の音源条件から幾分か離れた理論設定となっている。

ところで、集束ビームに対する KZK の式の適用限界を克服するために、Tjøtta らは凹面振動子が無限剛体バツフル内にキャップ状で埋め込まれている音源モデルを想定し、焦点とキャップで囲まれる円錐領域の外側と内側でビームを焦点を原点とした球面波で展開した混成モデル式 (Mixed model equation, 以下、MME) を提案している⁸⁾。しかし、式の提案で終始し、実際の数値結果を与えていない。このモデル式によって得られる解は焦点に近づくほど発散状態になり、近似の度合いが悪くなる。このため、Ystad らは MME を音源近傍の球面波領域において適用し、焦点手前から焦点後の領域では平面波の記述に有利な KZK の式を利用するといった、混合モデル (Composite model, CM) を提案している⁹⁾。そして、音源面の音圧分布が一様分布した音源 (以下、一様分布音源と略す) に対して、 $\alpha_0 = 26.75^\circ$ の半開口角を上限として音波ビームの伝搬に伴う非線形高調波の発生を数値計算にて定量化している。さらに、実験結果との比較から CM 法の妥当性を示し、広開口角集束ビームの特徴を述べている。しかし、彼らが得た音場特性のうち、回折に起因する音圧振幅のディップが焦点近傍で 0 から大きくはずれており、また、音圧のピークが焦点から外側の領域 (post-focal region) で位置するなど、従来の理論で見られない結果を導いている。彼らはこれらの結果を広開口角集束ビーム特有の現象と説明しているが、果たしてそうであるか疑わしい。

本報告では、ビームの集束や広がりを適切に記述できると思われる扁平回転楕円体座標変数をもってビー

*Nonlinear sound beams from a focusing source with a wide angle aperture. By T.Ishiwata(Oki electric Industry Co.,Ltd.) and T. Kamakura(University of Electro-Communications). E-mail: Ishiwata@okilab.oki.co.jp

ム方程式を導き、基本波および高調波の空間音圧分布を求める。そして、ここで提案したビーム方程式の特徴や、Ystad らの結果との相違点を述べる。

2. 回転楕円体ビーム方程式 (SBE)

Fig.1 に示す扁平回転楕円体座標 (oblate spheroidal coordinates) を導入する。この座標変数 (σ, η, φ) とデカルト座標変数 (x, y, z) には次の関係がある¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} x &= b\sqrt{(1+\sigma^2)(1-\eta^2)}\cos\varphi \\ y &= b\sqrt{(1+\sigma^2)(1-\eta^2)}\sin\varphi \\ z &= b\sigma\eta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、

$$-\infty < \sigma < \infty, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2)$$

であり、また、 $2b$ は共焦点距離 (interfocal distance) である。 $\sigma \rightarrow 0$ とすれば厚さが無視できる円板になり、円板による波の散乱問題を取り扱うときに扁平回転楕円体座標がしばしば利用される。

ところで、この座標系の原点に円形平面音源の開口面が $x-y$ 平面に平行になるように置き、 z 軸 (音軸) 方向に正弦音波が放射されている場合を想定する。このとき、 z 軸に進む波の波面は、波の広がりを考えると、ちょうど $\sigma = \text{const.}$ の曲面に近づくであろう。また、波数ベクトルは $\eta = \text{const.}$ の曲面に沿って進むといえるだろう。このような波の広がりに即した座標系を利用すれば、近似のよいビーム方程式が導かれると予想される。

まずは線形場を対象とする。波動方程式

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

を扁平回転楕円体座標で表すと

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(1+\sigma^2) \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1-\eta^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] - \frac{b^2(\sigma^2 + \eta^2)}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

になる¹⁰⁾。ここで、 p は音圧、 c_0 は微小振幅音波の音速である。また、音場は z 軸に関して回転対称として、変数 φ には依存しないとする。集束ビームの場合、Fig.2 のように音源から焦点手前の領域 (pre-focal region) までは近似的に球面波で伝搬し、そこから焦点後の領域 (post-focal region) は近似的に平面波で伝搬するとみて、次のように式 (4) を近似展開する。この考えは、Ystad らの報告⁶⁾と同じである。

(i) $\sigma < \sigma_0 < 0$ の領域 (球面波で展開)

座標の原点 O から任意の位置 P までの距離 R

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = b\sqrt{\sigma^2 + 1 - \eta^2} \quad (5)$$

を用いて、波を音速とともに動く座標で見るための遅延時間

$$t'_s = t + \frac{R}{c_0} = t + \frac{b\sqrt{\sigma^2 + 1 - \eta^2}}{c_0} \quad (6)$$

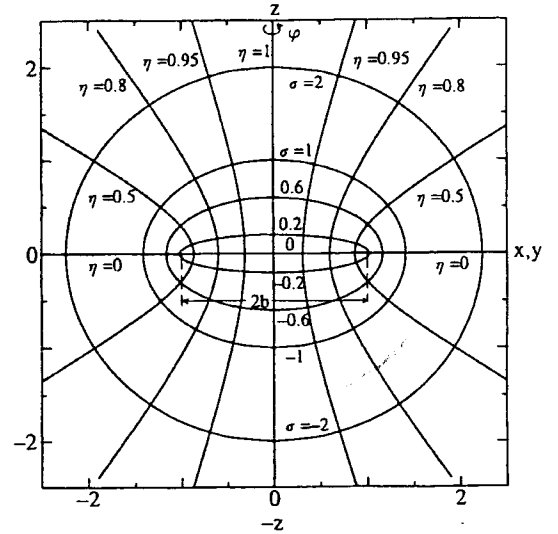


Fig.1 Oblate spheroidal coordinate system.

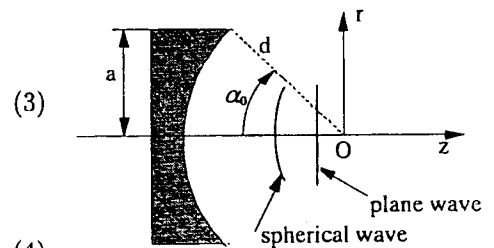


Fig.2 Focusing source.

を導入し、式(4)を書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(1 + \sigma^2) \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] + \frac{2b}{c_0 \sqrt{\sigma^2 + 1 - \eta^2}} \left[\sigma(1 + \sigma^2) \frac{\partial^2 p}{\partial t_s^2 \partial \sigma} - \eta(1 - \eta^2) \frac{\partial^2 p}{\partial t_s^2 \partial \eta} + (\sigma^2 + \eta^2) \frac{\partial p}{\partial t_s^2} \right] = 0 \quad (7)$$

になる。さらに、放物近似を適用して左辺第1項を省略し、

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \tau_s = \omega t_s', \quad \varepsilon = \frac{1}{2kb} \ll 1 \quad (8)$$

で無次元化し、そして

$$\eta = \cos \theta \quad (9)$$

の変数を用いる。このときの θ は $\sigma \gg 1$ において、原点 O を見込む、観測点と z 軸との角になる。

球面波を想定しての最終的なビーム方程式は、結局、

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau_s \partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sigma(1 + \sigma^2)} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau_s \partial \theta} + \frac{\varepsilon \sqrt{\sigma^2 + \sin^2 \theta}}{\sigma(\sigma^2 + 1)} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{\sigma^2 + \cos^2 \theta}{\sigma(\sigma^2 + 1)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau_s} = 0 \quad (10)$$

になる。

(ii) $\sigma_0 < \sigma$ の領域 (平面波で展開)

球面波で展開したと同様な手続きでビーム方程式を導く。遅延時間は式(6)に代わって

$$t_p' = t - \frac{b\sigma\eta}{c_0} \quad (11)$$

を用いる。放物近似を行った最終的なビーム方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau_p \partial \sigma} - \frac{\sigma}{1 + \sigma^2} \sin \theta \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau_p \partial \theta} + \frac{\varepsilon(2 - \cos \theta)}{\sigma^2 + 1} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (12)$$

になる¹¹⁾。ここで、 $\tau_p = \omega t_p'$ である。

以上の式(10)と式(12)が球面波と平面波で展開したときのビーム方程式である。これら2つの式はともに扁平回転楕円体変数 (σ, η) の空間で展開されているので、接続が容易である。すなわち、式(6)と式(11)から $\sigma = \sigma_0$ にて、

$$\tau_s = \tau_p + kb(\sqrt{\sigma_0^2 + \sin^2 \theta} + \sigma_0 \cos \theta) \quad (13)$$

の式を利用すればよい。

ところで、Ystadらは球面波で展開して得られるMME(球座標)と平面波で展開して得られるKZKの式(デカルト座標)の2つ解を補間法にて接続している⁹⁾。式(13)が示すように、われわれが提案する回転楕円体ビーム方程式(SBE, Spheroidal beam equation)ではそのような補間は不必要で、計算も簡単かつ滑らかに2つの解は接続される。これも特長のひとつである。

つぎに音源面上での境界条件を考える。曲率半径 $d(=b\sigma_{\max})$ の球面上で音波が放射されれば、集束の条件は満たされる。このためには、 $\sigma = -\sigma_{\max}$ ($\sigma_{\max} > 0$) の面から

$$k\Delta R = k(R - d) \quad (14)$$

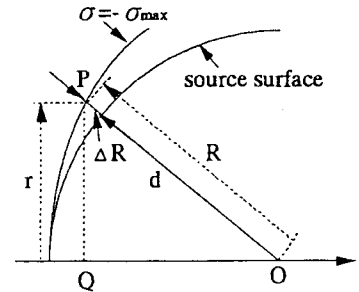


Fig.3 Boundary condition.

だけ位相を進めて音波を放射すればよい (Fig.3 参照)。式 (6) に考慮して初期波の位相は $\sigma = -\sigma_{\max}$ の面上にて

$$\phi = \omega t + k\Delta R = \omega t'_s - kR + k(R-d) = \tau_s - kd \quad (15)$$

になる。ここで、 kd は定数であり σ , θ に無関係だから省いてもよい。また、 $\sigma = -\sigma_{\max}$ にて

$$r = b\sqrt{1 + \sigma_{\max}^2} \sin \theta, \quad R = b\sqrt{\sigma_{\max}^2 + \sin^2 \theta} \quad (16)$$

である。この式 (16) から OQ 間隔は

$$OQ = \sqrt{R^2 - r^2} = b\sigma_{\max} \cos \theta = d \cos \theta \quad (17)$$

よって、半開口角 α_0 と θ とに

$$\tan \alpha_0 = \sqrt{1 + 1/\sigma_{\max}^2} \tan \theta \quad (18)$$

の関係がある。以上より、境界条件は $\theta \leq \tan^{-1} \left[\tan \alpha_0 / \sqrt{1 + 1/\sigma_{\max}^2} \right] (= \theta_0)$ の範囲にて

$$\bar{p}|_{\sigma=-\sigma_{\max}} = \frac{F(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta / \sigma_{\max}^2}} \quad (19)$$

$\theta > \theta_0$ では $\bar{p}|_{\sigma=-\sigma_{\max}} = 0$ である。ここで、 $F(\theta)$ は面上の音圧分布で、一様分布音源ならば $F(\theta) = 1$ と置く。

3. 数値例

Ystad らの数値結果⁹⁾と比較するために、音源条件を以下のように定める。

周波数 $f = 1\text{MHz}$, 焦点距離 $d = 10\text{cm}$, 音速 $c_0 = 1492\text{m/s}$ (水を想定), $F(\theta) = 1$

半開口角 α_0 は集束音源の開口半径 a と焦点距離 d とで

$$\sin \alpha_0 = \frac{a}{d} \quad (20)$$

で与えられる。

まず、従来の放物近似解とレイリーの積分解との比較を行う。ここでいう放物近似解とは、KZK の式で非線形項を取り除いた

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau \partial \sigma} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (21)$$

であり、集束音源に対する音軸上の音圧は解析的に求められる³⁾。なお、式 (21) で $\xi = r/a$, また、 σ はいまの場合、 z をレイリー距離 $ka^2/2$ で除した無次元化距離である。レイリーの積分解とは点音源を音波放射面で積分したもので、集束音源では Williams/O'Neil の解^{12),13)}とも呼ばれ、

$$p(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \tau} dS \quad (22)$$

の積分で与えられる。ここで、 S は開口面積、 $\tau = t - z/c_0$ である。この積分解は開口面が平面で、しかも平面剛体バツフル内に埋め込まれた音源による音場に対しては厳密であるが、集束音源のように開口放射面が曲面であるような場合は厳密とはいえない。しかし、Coulouvrat によると、 $kd \gg 1$ であれば、レイリーの積分解は $\alpha_0 \leq 60^\circ$ 以下の開口角において、ほぼ厳密とみなしてもよいことが示されている¹⁴⁾。したがって、ここでは、レイリーの積分解を厳密解とみて、SBE の解の有効性を評価する。

Fig.4 は、音軸上の音圧振幅 $\bar{p} = p/p_0$ について、式 (21) で与えられた放物近似解と式 (22) のレイリー積分解を比較するものである。横軸の ζ は焦点距離 d で無次元化された伝搬距離 z/d である。すでに Tjøtta ら

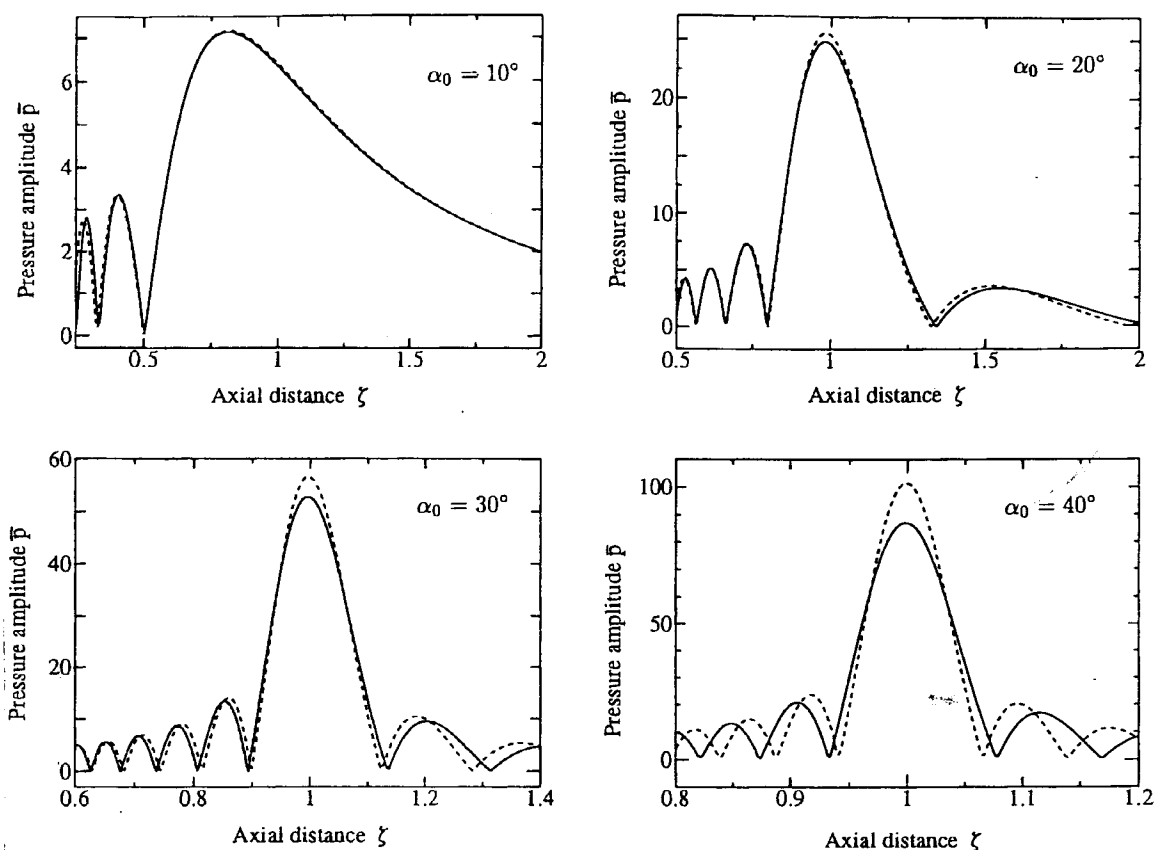


Fig.4 Axial pressure amplitudes for various aperture angles. Solid and solid curves are the numerical solutions using the parabolic equation and the Rayleigh's integral, respectively. $\zeta = z/d$.

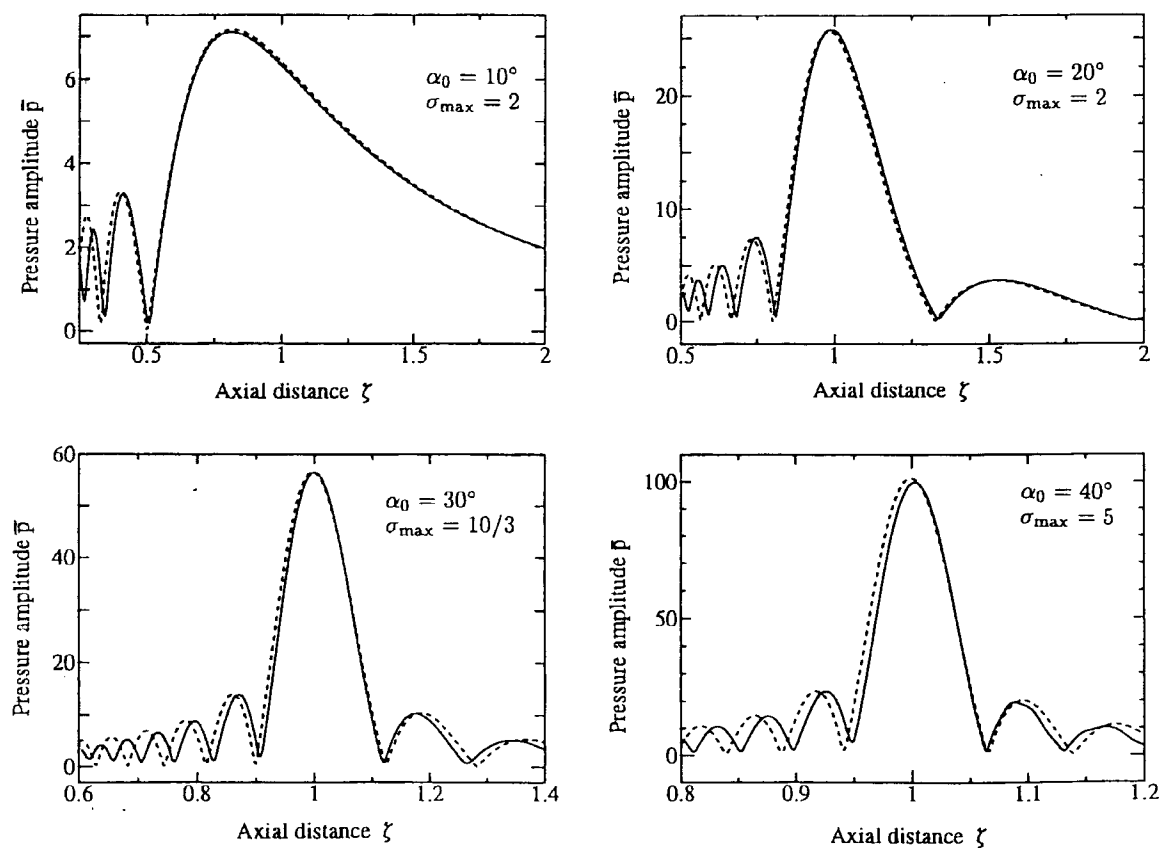


Fig.5 Axial pressure amplitudes for various aperture angles. Solid and solid curves are the numerical solutions using the SBE and the Rayleigh's integral, respectively.

によって、放物近似解は開口角が大きくなると精度が悪くなることが報告されている。この計算結果はその報告を裏付けている。すなわち、 $\alpha_0 < 20^\circ$ の範囲では放物解の近似度はよいが、それを超えると近似が悪くなる。特に、焦点付近の音圧はつねに厳密解よりも下回る。この数値例からも、開口角が広がると KZK の式が適用できなくなることがわかるであろう。なお、Tjøtta らは KZK の式の適用開口角の目安として $\alpha_0 \leq 16^\circ$ としている¹¹⁾。

Fig.5 は SBE の解とレイリーの積分解との比較である。SBE の解析解は現在のところまだ得られていないので数値解を示した。数値解析は差分法によったが、このときの刻み幅について、 θ 方向は $\Delta\theta = 0.2^\circ$ 、つまり半無限空間 ($\theta \leq 90^\circ$) を 450 等分している。また、 σ 方向に対しては、初期値として $\Delta\sigma = 0.1\sigma_{\max}\sqrt{1+\sigma_{\max}^2}(\Delta\theta)^2/\varepsilon$ に選び、焦点に近づくほど細かくしている。 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\sigma$ をこれらの刻み幅前後に変えても、数値結果が大きく変化することはなかった。開口角が大きくなるにしたがって b の値を小さくとる必要がある。図中には $\sigma_{\max} = d/b$ ($d = 10\text{cm}$) の値を記したが、この数値は一応の目安である。球面波展開と平面波展開との接続位置 σ_0 は、すべての開口角に対して -1 に設定している。

数値結果に目を向けよう。数値計算上の誤差があろうが、全体的に見て SBE の解とレイリー積分解とはよく一致している。特に、式 (21) の放物近似解で見られた焦点付近での近似の劣化は認められず、 $\alpha_0 = 40^\circ$ においても焦点の音圧は積分解とほぼ同じ大きさになっている。ただし、ピーク音圧に達する位置が、焦点から多少遠方に位置する傾向にある。この傾向は Ystad らの報告にも認められるが、彼らの数値結果と比べてそれほど顕著ではない。このことを確認するために、Fig.6 に Ystad らが数値例として取り上げた最大開口角 $\alpha_0 = 26.75^\circ$ の結果を示す。ちなみに、このときの開口半径は $a = 4.5\text{cm}$ である。また、点線はレイリーの積分解である。

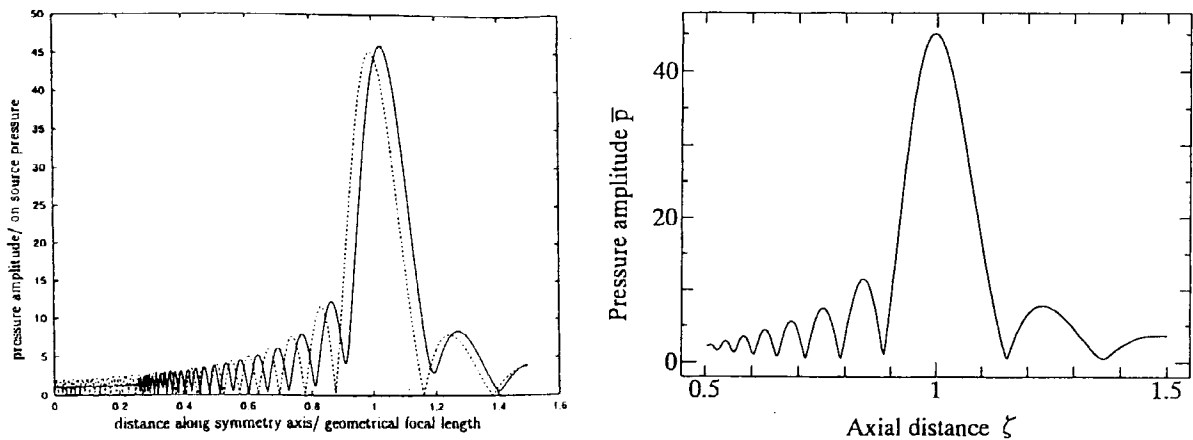


Fig.6 Axial pressure amplitudes. Ystad *et al.*'s results(left, solid curve) and our results(right). Dotted curve is the Rayleigh's integral solution.

Fig.6 を 2 つの数値結果を見て次のことに気づくであろう。まず、Ystad らの結果では、音圧の分布カーブが厳密解といわれるレイリーの積分解に比較して全体的に外側に移動し、特にピーク音圧の位置が幾何学的な焦点から大きくずれている。また、ピーク音圧は積分解と比べて多少大きめになっている。さらに、焦点の回りの音圧の極小値に注目すると、音圧比 p/p_0 が 5 程度あり、この点もレイリーの積分解 (音圧比がほぼ 0) と大きく異なる。SBE に基づいたわれわれの結果は全体的にレイリーの積分解に近い。ところで、Ystad らは CM 法に基づいた数値結果とレイリーの積分解の相違点の要因として、 $\alpha = 26.75^\circ$ という比較的広い開口角からの集束ビーム特有の現象であって、理論展開や近似の飛躍ではないと結論しているが、われわれの結果からすればその結論付けは疑問である。

4. 非線形音波ビームへの拡張

音波の振幅が増すと弾性媒質の非線形性によって波形歪みが発生するようになる。このような非線形音波ビームの伝搬を記述する波動方程式として、次の式が提案されている^{8),15)}。

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}, \quad (23)$$

ここで、 δ は音波吸収に関わる係数、 ρ_0 は媒質密度、 β は非線形係数である。式 (23) は音圧と粒子速度の比が $\rho_0 c_0$ であるとの条件で導かれており、音波ビームの周波数が高く、回折が比較的弱いときにこの条件が満たされることがわかっている^{8),15)}。

2節で議論したと同様な手続きで、式 (23) の ∇^2 の項を扁平回転楕円体座標で表し、放物近似を行い、非線形ビーム方程式を求める。例えば、平面波領域では式 (11) の遅延時間を導入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \sigma \partial \tau} - \frac{\varepsilon(2 - \cos \theta)}{1 + \sigma^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) - \frac{\sigma}{1 + \sigma^2} \sin \theta \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta \partial \tau} \\ - \alpha b \frac{\sigma^2 + \cos^2 \theta}{1 + \sigma^2} \frac{\partial^3 \bar{p}}{\partial \tau^3} = \frac{\beta p_0 b \omega \sigma^2 + \cos^2 \theta}{2 \rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 \bar{p}^2}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

を得る¹⁴⁾。ここで、 α は音波吸収係数で $\alpha = \delta \omega^2 / 2 c_0^3$ の関係がある。

波形歪みが生ずることは高調波が発生していることを意味し、歪んだ周期波形はフーリエ級数に展開できる。

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \sin n\tau + h_n \cos n\tau), \quad (25)$$

式 (25) を式 (24) に代入してフーリエ係数 g_n と h_n に関する結合方程式を求め、その方程式を差分法にて解く。この一連の計算スキームは基本的には Aanonsen の手法と同じである¹⁶⁾。

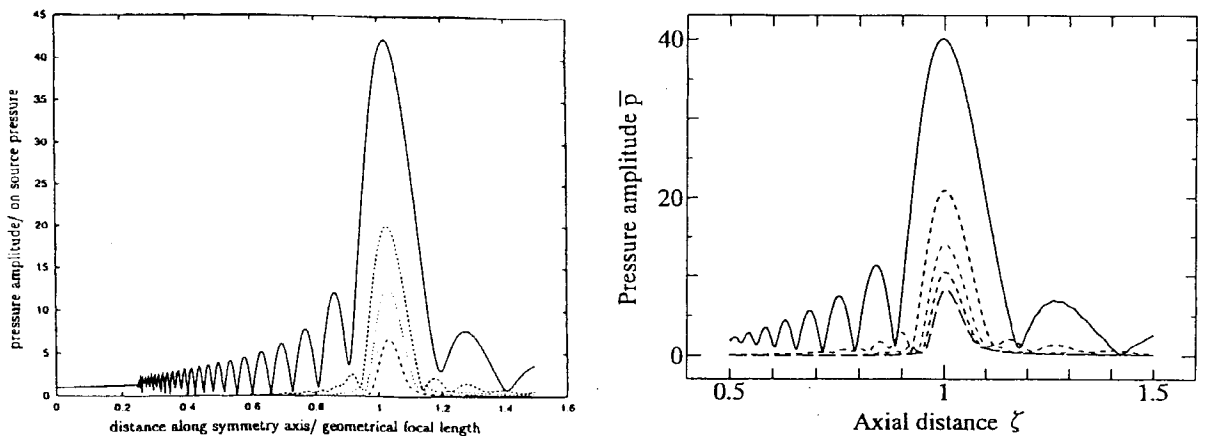


Fig.7 Harmonic generation in focused beams. $p_0 = 302\text{kPa}$. Ystad *et al*'s results (left) and our results(right).

Fig.7 は、やはり Ystad らの計算結果と比較するために、 $\alpha = 26.75^\circ$ 、初期音圧 $p_0 = 302\text{kPa}$ に設定して行った音軸上の音圧特性である。基本波から第 40 高調波までのフーリエ係数を含めて計算し、図には基本波から第 5 高調波までの成分をあげている。図の (a) は Ystad らの結果、(b) は SBE の解である。すでに Fig.6 で知ったように、Ystad らの結果では基本波のピークが焦点より外側に位置している。この傾向は高調波についてもいえる。それと同時に、両計算結果に各周波数成分の振幅の相異が現れている。例えば、Ystad らの結果では基本波は音圧比 p/p_0 がおよそ 42 であるが、われわれの結果では 40 である。基本波成分が異なれば当然、高調波成分の大きさも異なってくる。第 5 高調波では、音圧比は 6 に対して 9 になっている。このような相異は計算誤差というよりは、むしろどちらかのモデル式に適用限界があるように思われるが、この点は今後さらに検討する必要がある。

最後に、SBEの解による焦点面での調波のビームパターンをFig.8にあげておく。高集束利得であることから、 -3dB ビームの幅は基本波でおよそ 1.2mm 、高調波になるほど狭くなっている。また同時に、サイドロープの発生は高調波ほど弱くなる。さらに、高調波にフィンガーの存在が確かめられる。このような大まかな特徴は集束の弱いビームについてもいえたが³⁾、広開口角音源からのビーム特有の現象を知るには、もう少し詳細にビーム特性を評価しなければならない。

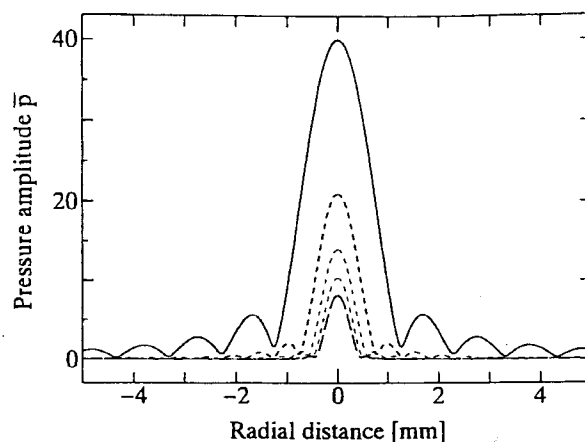


Fig.8 Beam patterns of the first to 5th harmonics in focused beams. $p_0 = 302\text{kPa}$.

5. あとがき

扁平回転楕円体座標系も用いて、集束ビームの伝搬を記述するモデル式(SBE)を導き、半開口角が 40° までの数値結果を示した。厳密解に近いといわれるレイリーの積分解と比較したところ、Ystadらの報告結果と異なったビーム特性が見られた。この相違点の要因を明らかにするためには、理論の妥当性をさらに追求するとともに、精密な実験を通して検討する必要がある。

参考文献

- 1) B.G.Lucas and T.G.Muir, "The field of a focusing source," J.Acoust.Soc. Am. **72**, 1289-1296(1982).
- 2) 例えば, M.A.Averkiou and M.F.Hamilton, "Measurements of harmonic generation in a focused finite-amplitude sound beam," J.Acoust.Soc. Am. **98**, 3439-3442(1995).
- 3) 鎌倉友男, 非線形音響学の基礎 (愛智出版, 1996).
- 4) J.N.Tjøtta, S.Tjøtta, and E.H.Vefring, "Effects of focusing on the nonlinear interaction between two collinear finite amplitude sound beams," J.Acoust.Soc.Am. **89**, 1017-1027(1991).
- 5) T.S.Hart and M.F.Hamilton, "Nonlinear effects in focused sound beams," J.Acoust. Soc.Am. **84**, 1488-1496(1988).
- 6) Y.Kagawa, T.Tsuchiya, T.Yamabuchi, H.Kawabe, and T.Fujii, "Finite element simulation of nonlinear sound wave propagation," J. Sound and Vib. **154**, 125-145(1992).
- 7) 矢野 猛, "集束する非線形音波の数値計算," 第 20 回非線形音響研究会資料 96-8 (1996).
- 8) J.N.Tjøtta and S.Tjøtta, "Model equation and boundary conditions for the sound field from a high frequency, strongly curved and highly intense transducer," acta acustica **1**, 69-87(1993).
- 9) B.Ystad and J.Berntsen, "Numerical solution of parabolic equations for strongly curved focusing sources," ACUSTICA-acta acustica **82**, 698-706(1996).
- 10) C. Flammer, *Spheroidal Wave Functions* (Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1957).
- 11) T.Kamakura, T.Ishiwata, and M.Kazuhisa, "A new theoretical approach to the analysis of nonlinear sound beams using the oblate spheroidal coordinate system," to submit to J.Acoust.Soc.Am.
- 12) A.O.Williams Jr., "Acoustic intensity distribution from a "piston" source. II. The concave piston," J.Acoust.Soc.Am. **16**, 219-227(1946).
- 13) H.T.O'Neil, "Theory of focusing radiators," J.Acoust.Soc.Am. **21**, 516-526(1949).
- 14) F.Coulouvrat, "Continuous field radiated by a geometrically focused transducer : Numerical investigation and comparison with an approximate model," J.Acoust.Soc.Am. **94**, 1663-1675(1993).
- 15) M.F.Hamilton and C.L.Morfe, "Model equations" in *Nonlinear Acoustics*, edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock (Academic Press, Calif., 1998), Chap.3.
- 16) S. I. Aanonsen, T. Barkve, J. Naze Tjøtta, and S. Tjøtta, "Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam," J. Acoust. Soc. Am. **75**, 749-768(1984).