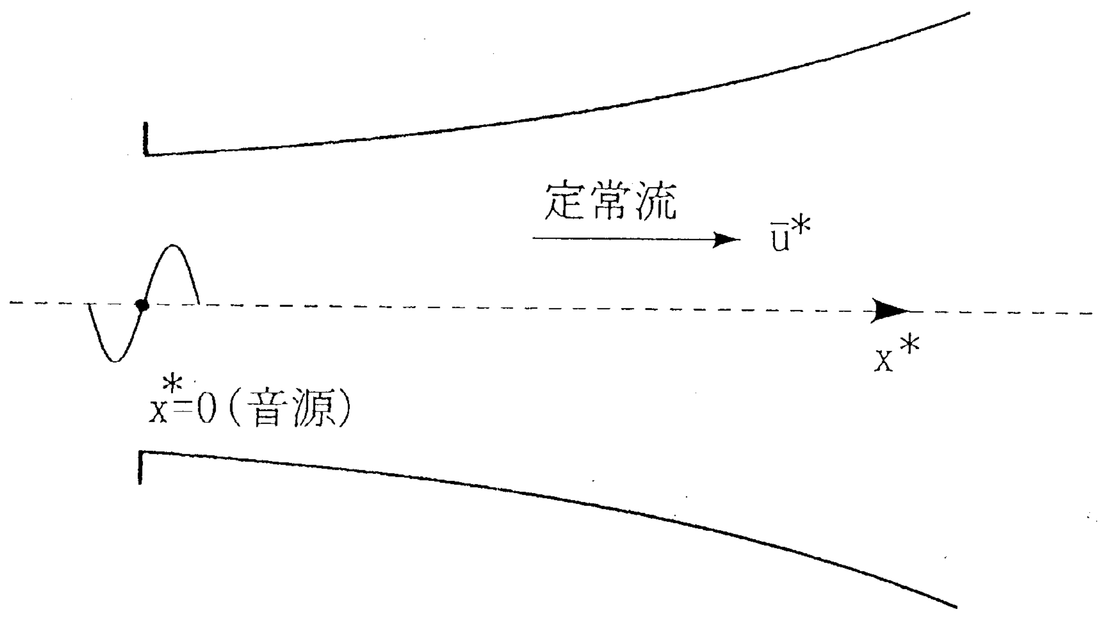
管内流中における弱非線形波の伝播

北大工 井上 良紀

無限に広い空間の中を進行する平面波は，非線形効果が十分に大きければ，はじめはなめらかな波形であっても，波形がだんだんと急峻になり衝撃波を形成し得る．このような弱非線形波の伝播が一般にBurgers方程式によって記述されることはあまねく知られている．特に，Hopf-Cole変換によってBurgers方程式は熱伝導方程式に帰着されるのでその厳密な解を求めることができる．静止した一様な流体で満たされている管中を伝わる波動に関しても，準一次元近似が認められるという条件下に詳しい研究がなされていて，その波動現象が一般化されたBurgers方程式で支配されることがわかっている [Ref. 1]．つまり，管の断面積が変化するという非一様性の効果が，波の振幅を変化させ，衝撃波の形成距離を変えたり，散逸性の効果に影響を及ぼす．ただし，この一般化されたBurgers方程式の解法に関しては，音響Reynolds数 $Re \to \infty$ の場合 (lossless limit) を除いて，一般には数値的に解くしか方法はなさそうに思われる．本研究は，はじめに管内に定常な流れがある場合に，弱非線形波の伝播にどのような影響をもつかを解析することを目的とする (定常流がある場合に拡張された問題を考察する)．まず，この小論では，このような非線形波動の伝播を記述する修正された一般化されたBurgers方程式を特異摂動展開法 (多重尺度法) を用いて導出する過程について述べる．



概念図

§1. 圧縮性流体の準一次元流を記述する方程式

管軸に沿って x 軸を設け，管の断面積を $A(x)$ とする．どの位置においても，任意の時刻に，断面内では物理量は一定とみなせる準一次元流を考える．たとえば，流速は管軸方向の成分 $u(x,t)$ のみをもつ．このような流れに関する連続の式，Navier-Stokes 方程式，エネルギーの式は，完全気体に対してつぎのように書ける．

$$A\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u A)=0, \tag{1}$$

$$\frac{Du}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\eta+\frac{4}{3}\zeta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

$$\frac{Dp}{Dt}+\gamma\frac{p}{A}\frac{\partial(uA)}{\partial x}=\frac{\kappa}{c_v}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{p}{\rho}\right)+(\gamma-1)\left(\eta+\frac{4}{3}\zeta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \tag{3}$$

$$\left(\frac{D}{Dt}:=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

ただし，ρ は流体の密度，p は圧力，ηとζ は第一粘性係数および第二粘性係数，κ は熱伝導率，$\gamma:=c_p/c_v$ (c_p :定圧比熱，c_v: 定積比熱) である (η , ζ , κ , γ , c_v は定数としている).

式(1)-(3) に現れる物理量を以下のように無次元化しよう．時刻 t と空間座標 x は，波の角振動数 ω と波数 k_0 (k_0 は $x=0$ にある音源の位置における音波の波数) を用いて無次元化する．また，未知関数に関しては，定常流の成分 (上に bar を付す) と波動 (擾乱) の成分が明確に判別できるように無次元化を行う:

$$t^*=\omega t\ ,\ x^*=k_0 x\ ,$$

$$\bar{u}^*=\frac{\bar{u}}{c_0}\ ,\ \bar{\rho}^*=\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\ ,\ \bar{p}^*=\frac{\bar{p}}{\gamma p_0}\ ,\ A^*(x^*)=\frac{A(x)}{A_0},$$

$$\frac{u}{c_0}=\bar{u}^*(x^*)+u^*\ ,\ \frac{\rho}{\bar{\rho}}=1+\rho^*\ ,\ \frac{p}{\bar{p}}=1+p^*. \tag{4}$$

ここに，c_0 , ρ_0 , p_0 , A_0 は $x=0$ における音速，密度，圧力，断面積を示す．

上で $*$ を付したものが無次元化された物理量を表わすのであるが，以後簡単化のために $*$ 記号は省くことにするので注意されたい．

§2. 定常流と波動成分

定常な流れに小さい擾乱が加えられて波動が伝播するような非線形現象を考察する．実際に次節で行うように物理量を音響Mach数 M で展開することによって摂動解をもとめる．このとき定常流を表す解は，基準となる最低次の解を構成する．この論文では，2次の微小量までを含めた範囲内で議論を進める．したがって，管の断面積の変化が極めてゆるやかであるという前提条件を考慮すると，定常流に対する散逸性の効果を無視してもよいことが容易にわかる．よって，定常流を支配する方程式は

$$\frac{d}{dx}(\bar{\rho}\bar{u}A)=0, \tag{5}$$

$$\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dx}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{p}}{dx}=0 \tag{6}$$

となる．式(6)は，等エントロピー流の条件 $\bar{p}/p_0=(\bar{\rho}/\rho_0)^\gamma$ を用いると直ちに積分できる．若干の計算を行うことによって，管の断面積と管流の速度を関連づける式

$$\frac{A}{A_{chok}}=\frac{1}{\hat{U}}\left[\frac{2}{(\gamma+1)-(\gamma-1)\hat{U}^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\ ,\ \left(\hat{U}:=\frac{\bar{u}}{u_{chok}}\right) \tag{7}$$

を得る．ただし，A_{chok} と u_{chok} はchokingが起こる(あるいは，起こると想定される)所の断面積と流速である．

一方，波動を支配する方程式は，3次以上の微小量を無視して

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}-u\frac{d}{dx}\log(\bar{\rho}A)\ , \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\bar{u}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+\left(\bar{u}^2-\bar{c}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]u=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)R_1$$
$$-\frac{\bar{c}^2}{\gamma}\frac{\partial R_2}{\partial x}-\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\gamma}\left(\bar{c}^2\frac{d\bar{u}}{dx}-\bar{u}\frac{d\bar{c}^2}{dx}\right)\frac{\partial p}{\partial x} \tag{9}$$

となる．ただし，

$$R_1=u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{d\bar{u}}{dx}\right)+\frac{p-\rho}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{p}}{dx}-\frac{\bar{c}^2}{\gamma}\rho\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\omega}{\rho_0c_0^2}\left(\eta+\frac{4}{3}\zeta\right)\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2u}{\partial x^2},$$

$$R_2=u\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{p}}{dx}+\frac{\gamma}{A}\frac{dA}{dx}\right)+\gamma p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{p}{\bar{p}}\left(\bar{u}\frac{d\bar{p}}{dx}+\gamma\frac{\bar{p}}{A}\frac{d}{dx}(\bar{u}A)\right)$$
$$-\frac{\omega}{\rho_0c_0^2}\frac{\kappa}{c_v}\frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right).$$

波の挙動を調べるためには，空間座標 x のかわりに，次式で定義される歪み座標 z を用いると都合がよい．

$$z=\int_0^x\frac{dx}{\bar{u}+\bar{c}}\ ,\ \left(よって\ \frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{\bar{u}+\bar{c}}\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{10}$$

これは，原点からの‘距離’を，原点を出発した音波が着目している地点に到達するのに要した(無次元化された)時間で示すものである．

§3. 一般化されたBurgers方程式の導出

波動の振る舞いを遠方場まで含めて有効に記述できる非線形方程式を導出するために，ここでは多重尺度法(method of multiple scales)を用いる．すなわち，独立変数として

$$t_n:=M^nt\ ,\ z^n:=M^nz\ ,\ (n=0,1,2,...) \tag{11}$$

を導入する．ただし， $M := u_0/c_0$ (u_0 は音源の最大速度) は音響 Mach 数であり，弱非線形性の仮定により， $M \ll 1$ である．通常どおりの多重尺度法の計算手順に従って，未知関数とオペレーターを

$$
\begin{aligned}
u &= Mu_1 + M^2 u_2 + O(M^3)\ , \ \ldots\ , \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + M\frac{\partial}{\partial t_1} + O(M^2)\ , \ \ldots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

のように展開する．これらを式(9)に代入する．このとき，定常流の物理量は z_1 のみに依存するものとする．

$O(M)$ の問題：波動方程式

$$
L\left[u_1\right] := \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial z_0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\bar{u}-\bar{c}}{\bar{u}+\bar{c}}\frac{\partial}{\partial z_0}\right)u_1 = 0 \tag{13}
$$

を得る．ここでは，進行波解

$$
u_1 = f\left(t_0 - z_0; t_1, z_1, t_2, z_2\right) \tag{14}
$$

に着目しよう．さらに， $\rho_1 = f/\bar{c}$, $p_1 = \gamma f/\bar{c}$ ももとまる．

$O(M^2)$ の問題：

$$
\begin{aligned}
L\left[u_2\right] = &-2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \frac{2\bar{u}}{\bar{u}+\bar{c}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial z_1} + \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial z_0}\right) + \frac{\bar{u}-\bar{c}}{\bar{u}+\bar{c}}\frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1}\right]u_1 \\
&-\frac{1}{\bar{u}+\bar{c}}\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\bar{u}}{\bar{u}+\bar{c}}\frac{\partial}{\partial z_0}\right)\left[u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{d\bar{u}}{dz_1}\right) + \frac{p_1-\rho_1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{p}}{dz_1} - \frac{\bar{c}^2}{\gamma}\rho_1\frac{\partial p_1}{\partial z_0}\right. \\
&\left.-\frac{1}{\bar{u}+\bar{c}}\frac{\omega}{\rho_0 c_0 u_0}\left(\eta + \frac{4}{3}\zeta\right)\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_0^2}\right] + \frac{\bar{c}^2}{\gamma}\frac{1}{\left(\bar{u}+\bar{c}\right)^2}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[u_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial z_0} + \frac{1}{\bar{p}}\frac{d\bar{p}}{dz_1}\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{\gamma}{A}\frac{dA}{dz_1}\right) + \gamma_1 p_1\frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{1}{\bar{u}+\bar{c}}\frac{\omega}{\rho_0 c_0 u_0}\frac{\kappa}{c_v}\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\left(p_1 - \rho_1\right)\right] + \frac{1}{\left(\bar{u}+\bar{c}\right)^2}\left[\left(\bar{u}-\bar{c}\right)\frac{d\bar{c}}{dz_1}\right. \\
&\left.-\bar{c}\frac{d\bar{u}}{dz_1}\right]\frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{\bar{c}^4}{\gamma\left(\bar{u}+\bar{c}\right)}\frac{d}{dz_1}\left(\frac{\bar{u}}{\bar{c}^2}\right)\frac{\partial p_1}{\partial z_0}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

第2近似解 u_2が永年項をもたないためには，式(15)の右辺がゼロにならなくてはならない． $\partial u_1/\partial t_0 = -\partial u_1/\partial z_0$, $p_1 = \gamma u_1/\bar{c}$, $\rho_1 = u_1/\bar{c}$ の関係を用いると，この条件は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\gamma+1}{2\left(\bar{u}+\bar{c}\right)}u_1\frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{1}{2\left(1+\bar{M}\right)}\left[\bar{M}\frac{d}{dz_1}\log\bar{M}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{d}{dz_1}\log\left(\bar{\rho}\bar{c}\bar{A}\right)\right]u_1 = \frac{1}{2\bar{\rho}\left(\bar{u}+\bar{c}\right)^2}\frac{\omega\delta}{c_0 u_0}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_0^2}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となる．ただし， $\bar{M} := \bar{u}/\bar{c}$ ， δ は音波の拡散率である．

ここで，変数変換

$$
\tau = t_0 - z_0\ , \ \tau_1 = t_1 - z_1\ , \ z_1 = z_1 \tag{17}
$$

を行い，従属変数に関するスケーリング

$$
u_1 = \psi\left(z_1\right)U(\tau\ , \ \tau_1\ , \ z_1\ ) \tag{18}
$$

を実行すれば，式 (16) は

$$\frac{\partial U}{\partial z_1}-\frac{(\gamma+1)\,\psi}{2\,(\bar{u}+\bar{c})}U\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{1}{2\bar{\rho}\,(\bar{u}+\bar{c})^2}\frac{\omega\delta}{c_0u_0}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \tag{19}$$

のような簡単な形になる．ただし， ψ は次式を満たすように決める．

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dz_1}+\frac{1}{2\left(1+\bar{M}\right)}\left[\bar{M}\frac{d}{dz_1}\log\bar{M}+\frac{d}{dz_1}\log\left(\bar{\rho}\bar{c}\bar{A}\right)\right]=0. \tag{20}$$

さらに，次式を満足するような新しい座標 σ を導入する：

$$\frac{d\sigma}{dz_1}=\frac{\gamma+1}{2\,(\bar{u}+\bar{c})}\psi. \tag{21}$$

すると，式 (19) から進行波の弱非線形伝播を記述する "一般化された Burgers 方程式"

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma}-U\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{F(\sigma)}{Re}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \tag{22}$$

$u_0 \to 0$ にすると

を得る．ここに， Re は音響 Reynolds 数であり，

$$Re:=\frac{(\gamma+1)\,c_0u_0}{\omega\delta}\;,\quad\left(\delta=\frac{\eta}{\rho_0}\left\{\frac{4}{3}+\frac{\zeta}{\eta}+\frac{\kappa\,(\gamma-1)}{\eta c_p}\right\}\right). \tag{23}$$

また，

$$F(\sigma):=\frac{\psi^{-1}}{\bar{\rho}\,(\bar{u}+\bar{c})}. \tag{24}$$

上に現れた各変数と，管の断面積 A とを関連付ける関係式を以下に明示しておこう．

$$\frac{A}{A_{chok}}=\frac{1}{M}\left[\frac{(\gamma-1)\,\bar{M}^2+2}{\gamma+1}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \tag{25}$$

$\bar{M} \Rightarrow 0$

$$\frac{\psi}{\psi_0}=\frac{\sqrt{\bar{M}}}{1+\bar{M}}, \tag{26}$$

$$F(\sigma)=\frac{1}{\psi_0 c_t^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}\frac{1}{\sqrt{\bar{M}}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\bar{M}^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \tag{27}$$

$$\sigma=\frac{(\gamma+1)\,M\psi_0}{2c_t}\int_0^z\frac{\sqrt{\bar{M}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\bar{M}^2\right)}}{\left(1+\bar{M}\right)^2}dz. \tag{28}$$

文献

[1] D.G.Crighton : Basic Theoretical Nonliniar Acoustics. in Frontiers in Physical Acoustics ed.D.Sette(North-Holland , Amsterdam , 1986)